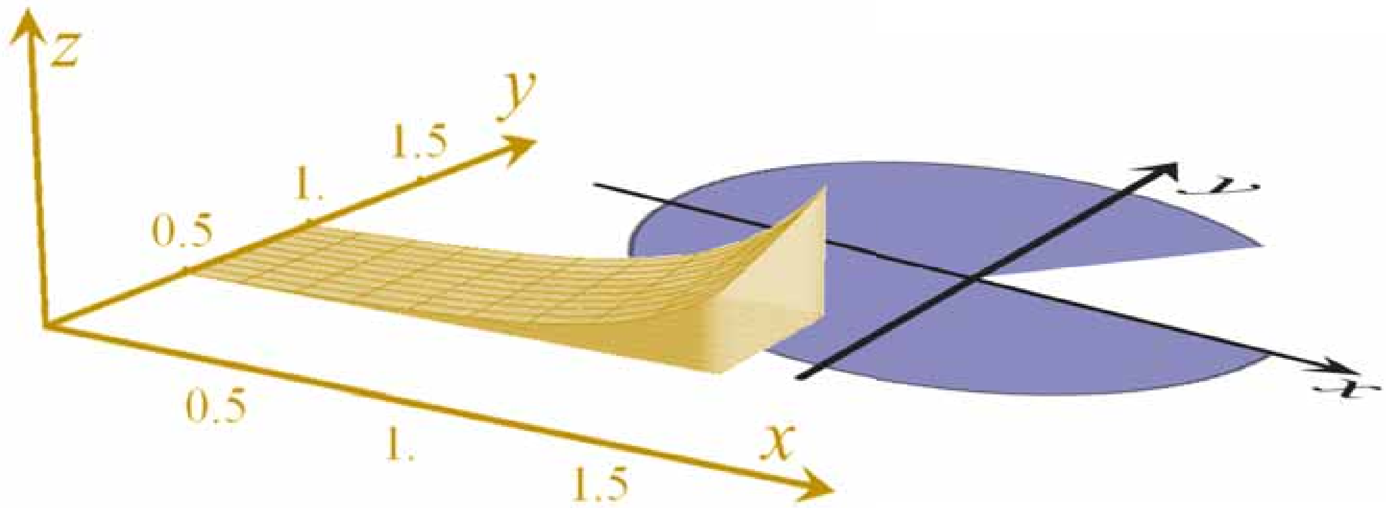
Doppelintegrale

$$\int_G f\, dA = \iint_G f\left(x, y\right) dy\, dx$$

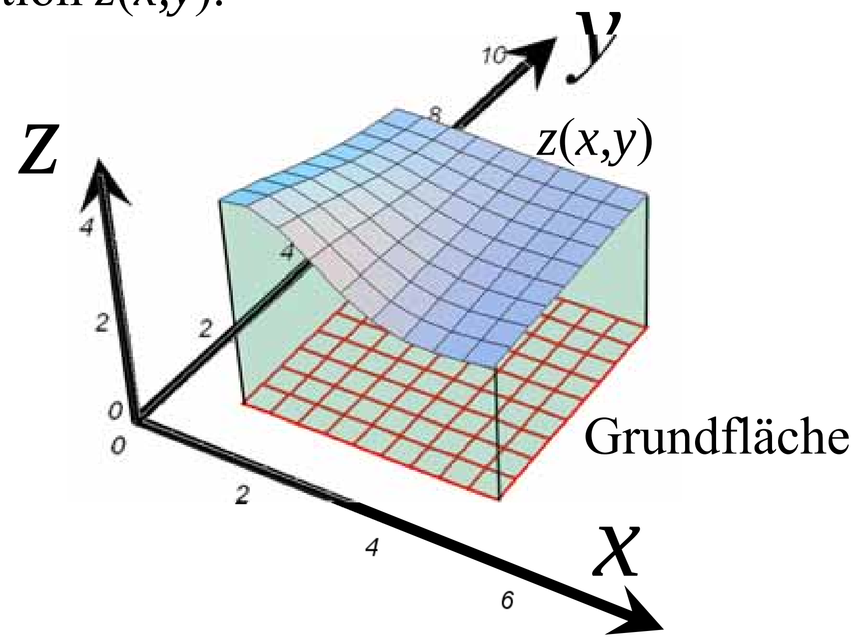
$$= \int_{R_2}^{R_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} f\left(r\cos\phi, r\sin\phi\right) r\, d\phi dr$$



Doppelintegrale → einführendes Beispiel

Als Vorwissen sollten Sie die Grundlagen zur Integration mitbringen (s. z.B. L. Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1).

Um die Grundidee hinter Doppelintegralen zu verstehen, betrachten wir als einführendes Beispiel die Volumenberechnung zwischen einer in der *x*-*y*-Ebene liegenden Grundfläche und einer darüber liegenden Fläche, gegeben durch eine Funktion $z(x,y)$.



Doppelintegrale haben sehr viele verschiedene Anwendungen und können auf keinen Fall auf Volumenberechnungen reduziert werden. Wir betrachten diese hier nur wegen der guten Anschaulichkeit.

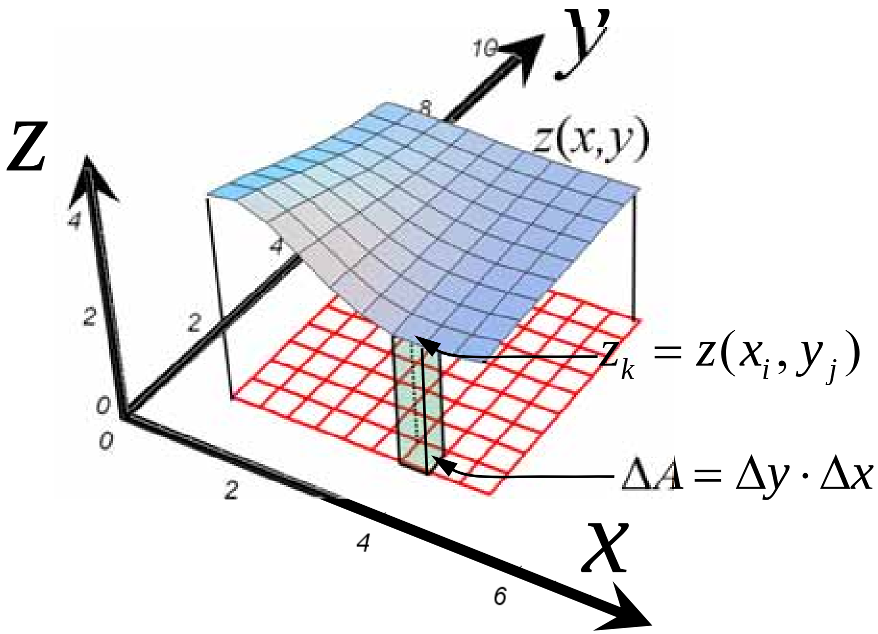
Das Gesamtvolumen V kann durch Aufsummieren von Teilvolumina ΔV bestimmt werden:

$$V = \sum_{k=1}^{n} \Delta V$$

Die Teilvolumina werden näherungsweise mit einem mittleren Funktionswert (Höhe) bestimmt:

$$\Delta V_k \approx z_k \cdot \Delta A_k \quad \text{(Grundfläche} \times \text{Höhe)}$$

$$V \approx \sum_{k=1}^{\dots} z_k \cdot \Delta A_k$$



Der Übergang zum Integral geschieht durch die Bestimmung des Grenzwertes einer 'unendlich feinen' Summe:

$$\boxed{V = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta A \to 0}} \sum_{k=1}^{n} z_k \Delta A = \int_G z \, dA}$$

In dieser abstrakten Schreibweise ist der Unterschied zum einfachen Integral kaum zu erkennen. Etwas konkreter wird es auf der folgenden Seite.

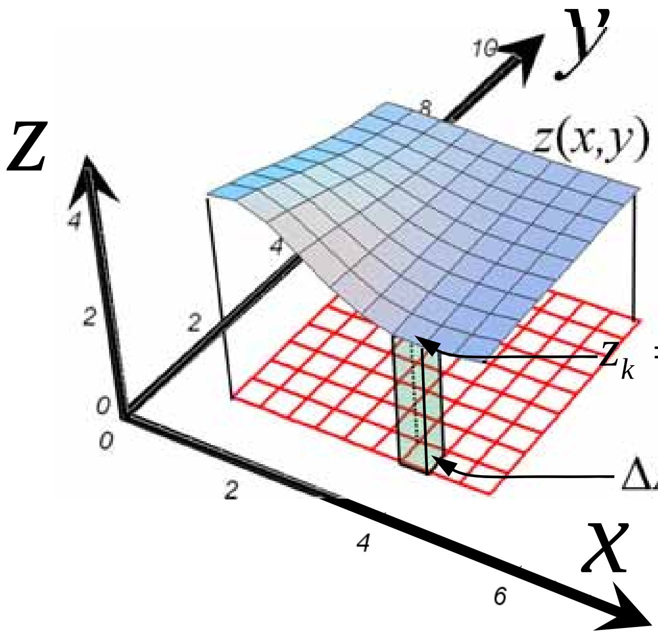
Doppelintegrale → einführendes Beispiel

Anstelle der einfachen Summe über *k*, bei der jede Position durch einen Index gekennzeichnet ist, können anschaulicher zwei Indizes (*i*, *j*) zur 'Adressierung' verwendet werden. Entsprechend muss über beide Indizes summiert werden.

$$z_k \longrightarrow z(x_i, y_j)$$

$$V \approx \sum_{i}^{n_x} \sum_{j}^{n_y} z(x_i, y_j) \Delta A$$

$$\approx \sum_{i}^{n_x} \sum_{j}^{n_y} z(x_i, y_j) \Delta y \Delta x$$



$z_k = z(x_i, y_j)$

$\Delta A = \Delta y \cdot \Delta x$

Übergang zum Doppelintegral:

$$\boxed{\begin{aligned} V &= \lim_{\substack{n_i, n_j \to \infty \\ \Delta x, \Delta y \to 0}} \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{n_j} z(x_i, y_j) \cdot \Delta y \Delta x \\ V &= \iint_G z(x, y)\, dy dx \end{aligned}}$$

Die jeweiligen Integrationsgrenzen sind durch die Geometrie des Integrationsbereichs festgelegt.

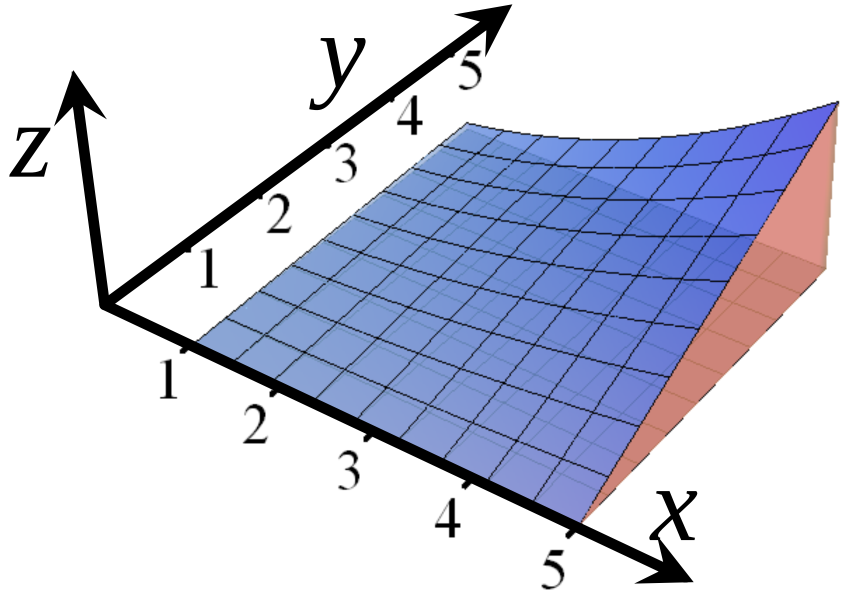
$\int$ und $d\ldots$ wirken jeweils wie eine Klammer. Man muss darauf achten, dass die, für die entsprechende Variable zutreffenden Integrationsgrenzen, jeweils an das richtige Integral geschrieben werden.
Für die im Eingangsbeispiel verwendet Reihenfolge gilt:

$$\int_G z(x,y)\,dA = \iint_G z(x,y)\,dydx = \int_{x_u}^{x_o}\int_{y_u}^{y_o} z(x,y)\,dy\,dx\,,$$

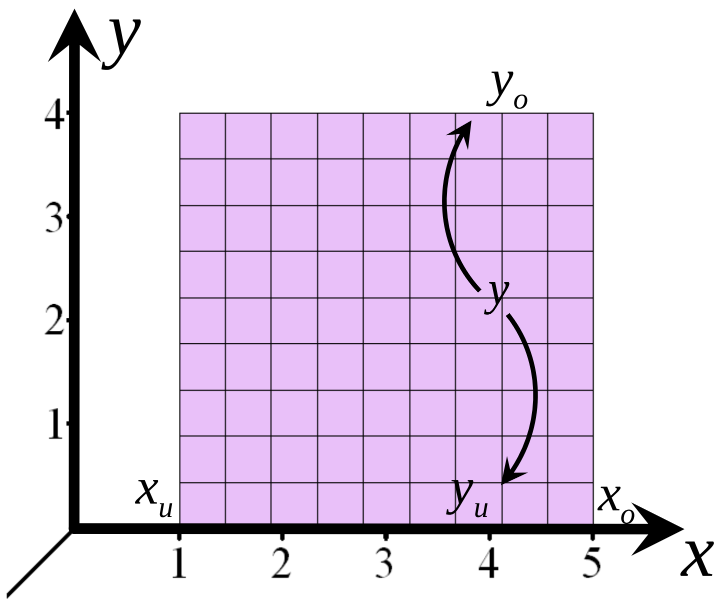
d.h. die Integrationsgrenzen für y gehören zum inneren Integral, die x-Grenzen zum Äußeren.

Die Integration erfolgt von ‚von innen nach außen'. Für die hier festgelegte Reihenfolge wird also zuerst über y integriert, x wird hierbei (genau wie bei partiellen Ableitungen) wie eine Zahl behandelt. Anschließend führt man die Integration über x durch. Dies geschieht genau wie bei herkömmlichen Einfachintegralen.

Beispiel: Integriert werden soll
die Funktion $z(x,y)=3\ x^2 y$ (s. Abb. rechts)



Das Integrationsgebiet entspricht dem gezeigten Bereich in der x-y-Ebene. Um die Integrationsgrenzen zu identifizieren, betrachtet man die Projektion auf die x-y-Ebene:

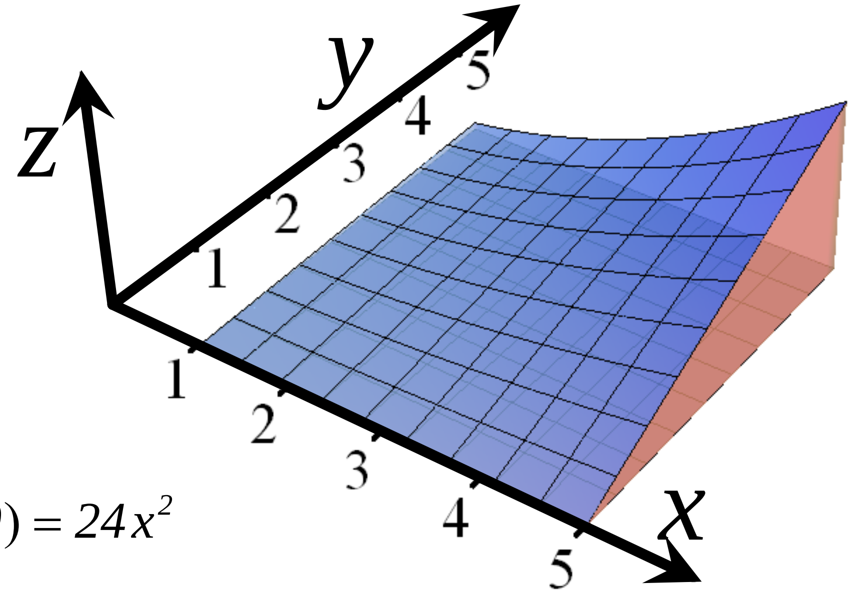


Für die y-Integrationsgrenzen gilt also:
$0 \le y \le 4$

Für die x-Integrationsgrenzen gilt:
$1 \le x \le 5$

Beispiel: $z(x,y) = 3\,x^2 y$

$$\int_G z(x,y)\,dA = \iint_G z(x,y)\,dy\,dx = \int_1^5 \int_0^4 3x^2 y\,dy\;dx$$



Man integriert **von innen nach außen**, d.h. zunächst löst man das y-Integral, x wird dabei wie eine Zahl behandelt:

$$\int_0^4 3x^2 y\,dy = 3x^2 \int_0^4 y\,dy = 3x^2 \left[\tfrac{1}{2} y^2\right]_0^4 = \tfrac{3}{2} x^2 (4^2 - 0) = 24x^2$$

Jetzt das äußere Integral:

$$\int_1^5 24x^2 dx = 24\left[\tfrac{1}{3} x^3\right]_1^5 = 8(5^3 - 1) = 992$$

Endergebnis:

$$\int_G z(x,y)\,dA = \iint_G z(x,y)\,dy\,dx = \int_1^5 \int_0^4 3x^2 y\,dy\;dx = 992$$

Rechteckige Integrationsgebiete sind definiert durch:

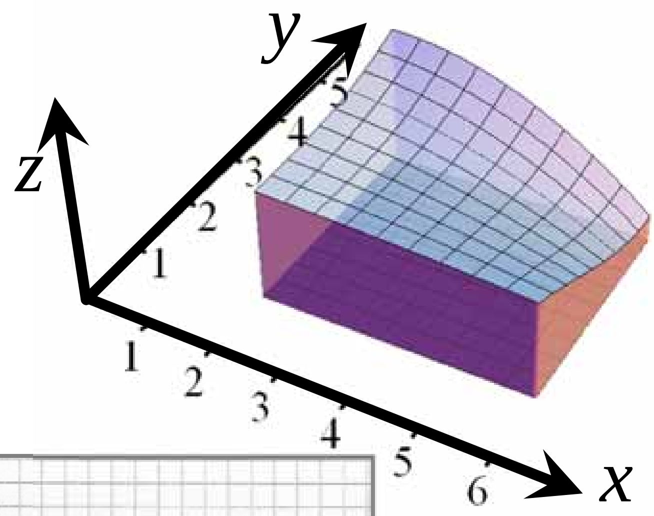
x-Bereich: $x_u \le x \le x_o$
y-Bereich: $y_u \le y \le y_o$

$$\int_G z(x,y)\,dA = \iint_G z(x,y)\,dydx = \int_{x_u}^{x_o}\int_{y_u}^{y_o} z(x,y)\,dy\,dx$$

Bei der Berechnung ist zu beachten:

- Es wird zwei mal nacheinander integriert
- Von innen nach außen
- Inneres Integral: alles was nicht *y* heißt ist (wie) eine Zahl
- Äußeres Integral: … ganz normal. Alle *y* sind ‚ausintegriert'.

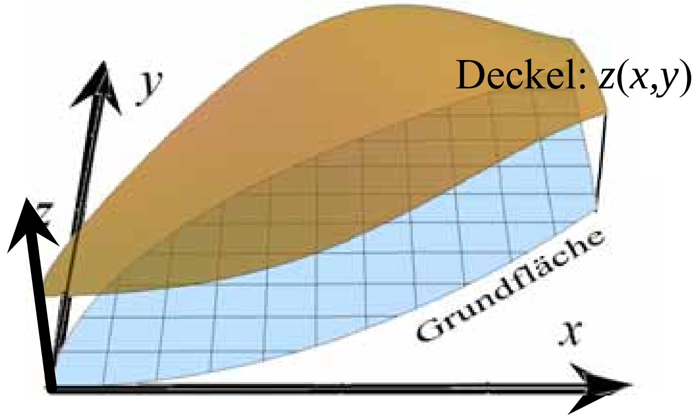
<u>Übung:</u> Integrieren Sie die
Funktion $z(x,y)= xy^3 - x^2y^2 +250$
über das Gebiet:
$2 \le x \le 6$
$1 \le y \le 4$



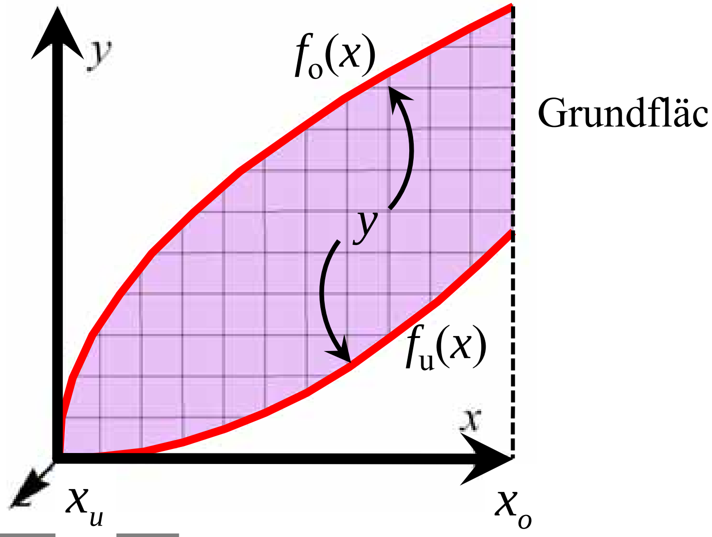
Zur Kontrolle das Ergebnis: *2564*

Das für rechteckige Integrationsgebiete gezeigte Vorgehen lässt sich unmittelbar auf allgemeinere Integrationsgebiete, mit eingrenzenden Funktionen, übertragen.

Betrachten wir das Volumen, welches durch die abgebildetes Deckelfläche (Funktion $z(x,y)$) und die gezeigte Grundfläche (Integrationsgebiet) definiert ist.



Die Integrationsgrenzen sind wieder am besten mit Hilfe der Projektion zu bestimmen:

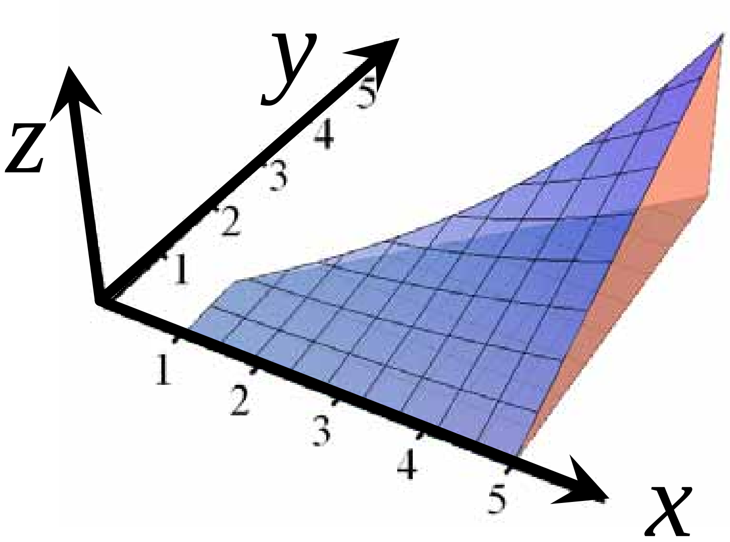


Die y-Grenzen sind jetzt durch zwei Funktionen definiert: $f_u(x) \leq y \leq f_o(x)$.

Bzgl. der x-Grenzen verfährt man wie zuvor: $x_u \leq x \leq x_o$.

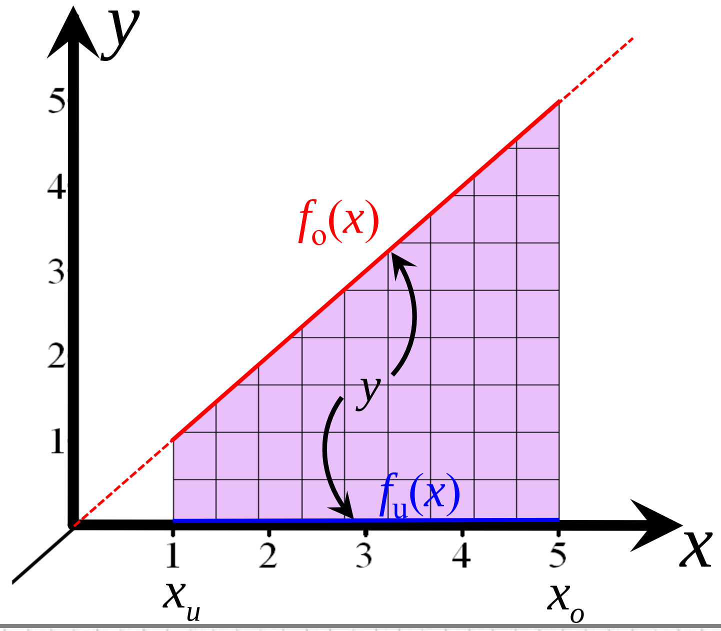
$$V = \int_G z(x,y)\,dA = \iint_G z(x,y)\,dy dx = \int_a^b \int_{f_u(x)}^{f_o(x)} z(x,y)\,dy\;dx$$

Beispiel: Integriert werden soll wieder die Funktion: $z(x,y)=3\,x^2y$ (s. Abb. rechts)



Das Integrationsgebiet ist jetzt trapezförmig.

Um die Integrationsgrenzen zu identifizieren, betrachtet man wieder die Projektion:

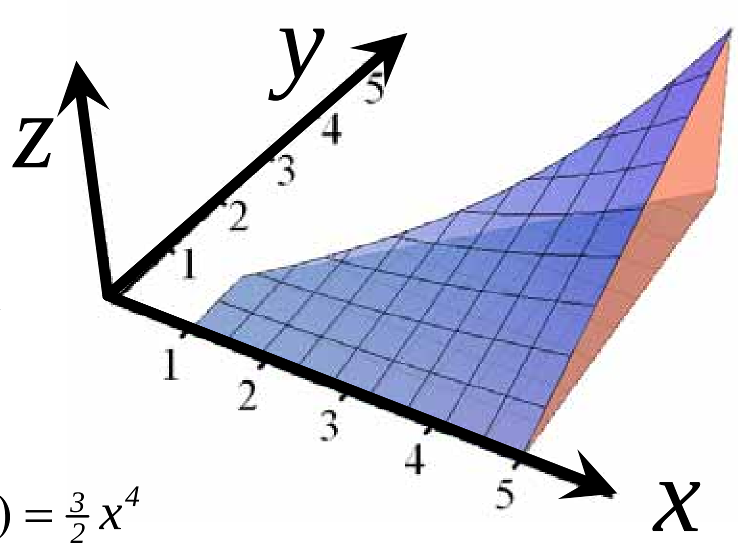


Für die y-Integrationsgrenzen gilt:
$f_o(x)=x$, $f_u(x)=0$ also $0 \le y \le x$

Für die x-Integrationsgrenzen gilt:
$1 \le x \le 5$

Beispiel: $z(x,y) = 3\,x^2y$

$$\int_G z(x,y)\,dA = \iint_G z(x,y)\,dy\,dx = \int_1^5 \int_0^x 3x^2y\,dy\;dx$$



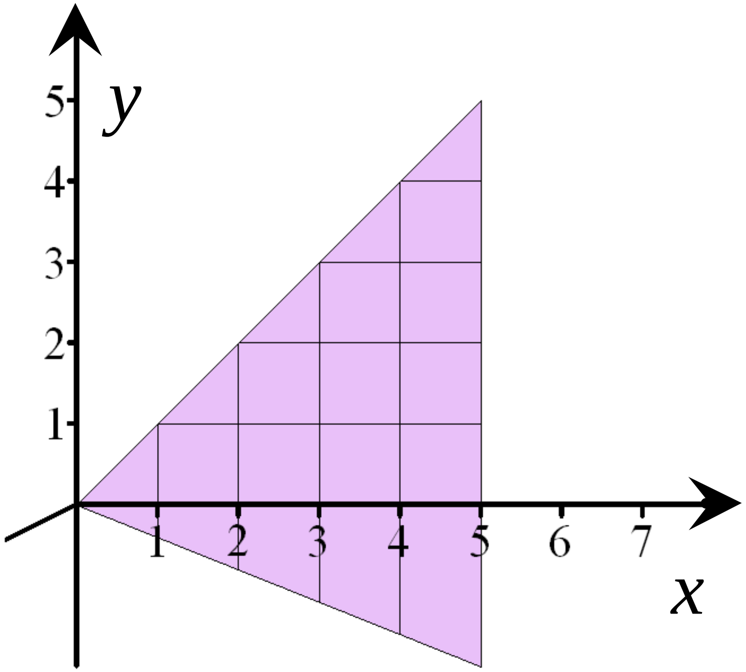
Zunächst das *y*-Integral, *x* (im Integranden und als Integrationsgrenze) wird hierbei wieder wie eine Zahl behandelt:

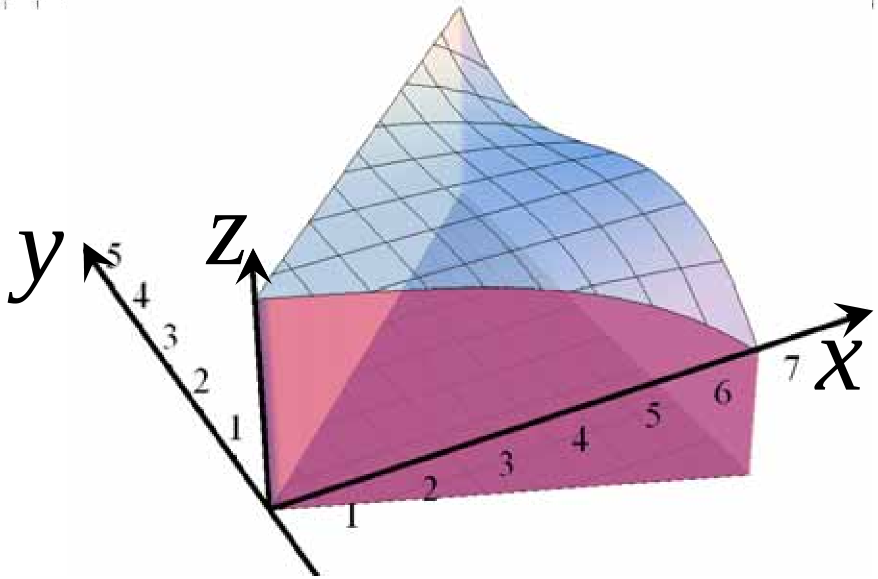
$$\int_0^x 3x^2y\,dy = 3x^2\int_0^x y\,dy = 3x^2\left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_0^x = \tfrac{3}{2}x^2(x^2-0) = \tfrac{3}{2}x^4$$

Jetzt das äußere Integral:

$$\int_1^5 \tfrac{3}{2}x^4dx = \tfrac{3}{2}\left[\tfrac{1}{5}x^5\right]_1^5 = \tfrac{3}{10}(5^5-1) = 937.2$$

<u>Übung:</u> Integrieren Sie die Funktion $z(x,y) = xy^3 - x^2y^2 + 350$ über das Gebiet:





Zur Kontrolle das Ergebnis: *5835.76*

Doppelintegrale → vereinfachte Berechnung

Unter folgenden Voraussetzungen lässt sich die Berechnung von Doppelintegralen vereinfachen:

1. Die Integrationsgrenzen <u>für beide</u> Veränderliche sind konstant

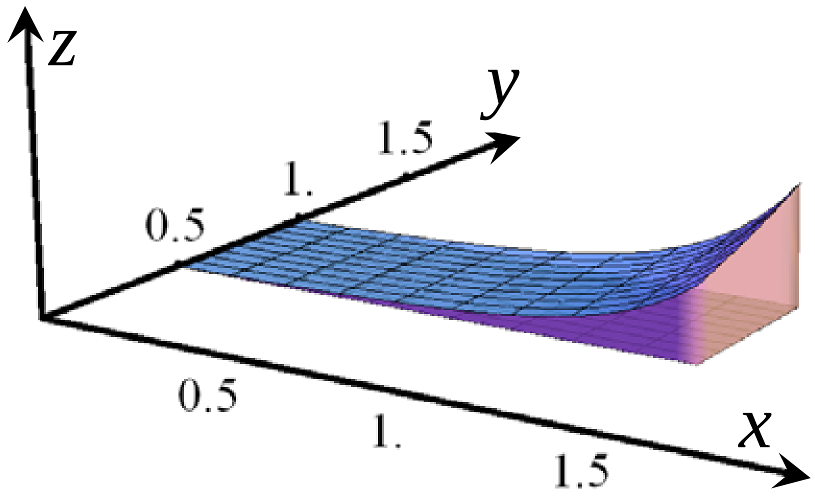
2. Der Integrand lässt sich in ein Produkt zerlegen, wobei der eine Faktor nur von *x*, der andere nur von *y* abhängt, also $z(x,y) = u(x) \cdot v(y)$

Dann (und nur dann!) gilt:

$$\boxed{\int_{x_u}^{x_o} \int_{y_u}^{y_o} g(x) \cdot h(y)\; dy\, dx = \int_{x_u}^{x_o} u(x)\, dx \cdot \int_{y_u}^{y_o} v(y)\; dy}$$

Unter den Voraussetzungen 1. & 2. lässt sich also ein Doppelintegral als Produkt zweier Einfachintegrale schreiben.

Die Funktion $z(x,y) = xe^{y+x^2}$
soll über das Gebiet $0 \le x \le 1.5$
$0.5 \le y \le 1$
integriert werden:



$$\int_G z(x,y)\,dA = \iint_G xe^{y+x^2}\,dydx$$

$$= \int_0^{1.5}\int_{0.5}^{1} xe^{x^2}\cdot e^y\,dy\,dx \overset{\text{Vor. 1. \& 2. erfüllt}}{=} = \left(\int_0^{1.5} xe^{x^2}\,dx\right)\cdot\left(\int_{0.5}^{1} e^y\,dy\right)$$

Substitution:
$u = x^2$

$$\left[\tfrac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^{1.5} \cdot \left[e^y\right]_{0.5}^{1}$$

$$\tfrac{1}{2}\left(e^{1.5^2}-1\right)\cdot\left(e-\sqrt{e}\right) = 4.539$$

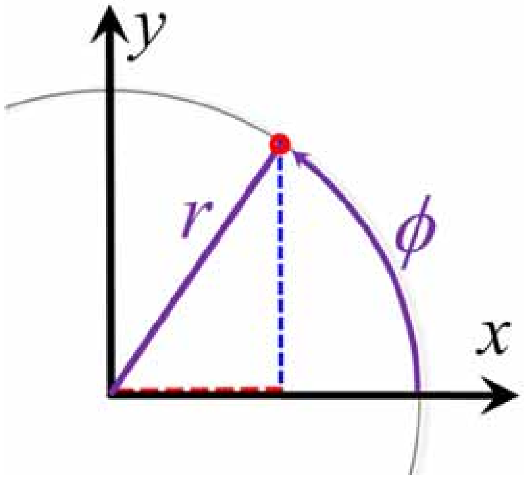
Das bisher besprochene Vorgehen ist prinzipiell für sehr allgemeine Integrationsgebiete anwendbar. Je nach Art der berandenden Funktionen, können die auftretenden Integrale aber schnell kompliziert werden.

Bei **runden Integrationsgebieten** oder solchen, die aus Kreissegmenten aufgebaut sind, bieten sich oft **Polarkoordinaten** an.

Bei **Polarkoordinaten** werden die kartesischen Koordinaten *x* und *y* eines Punktes durch den entsprechenden Radius (Abstand zwischen Punkt und Ursprung) und einen Winkel beschrieben:

$x = r \cdot \cos(\phi)$

$y = r \cdot \sin(\phi)$



Bei der Integration müssen:
1. die Integrationsgrenzen, **2.** der Integrand und **3.** die Differentiale $dA=dydx$ in Polarkoordinaten ausgedrückt werden (vergl. 'Übersetzungsvorschrift' nächste Seite).

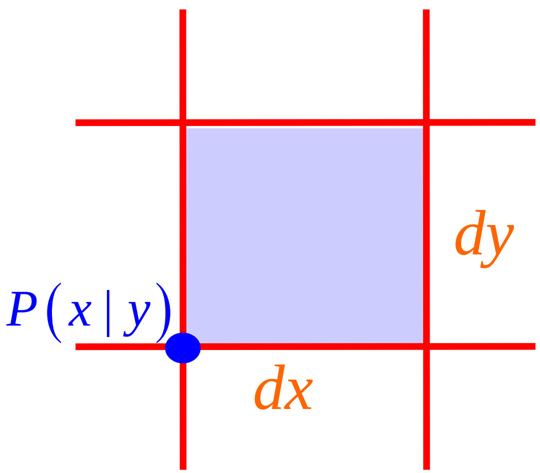
Zur **Beschreibung des Flächenelements**:

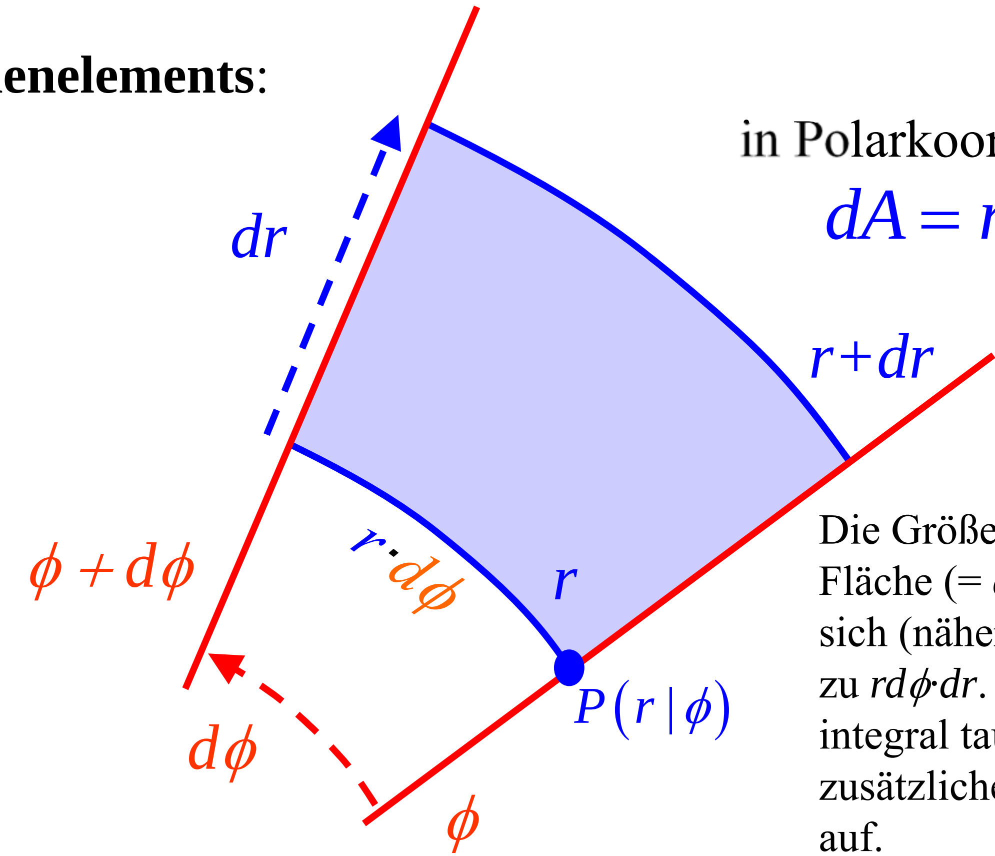
in kartesischen Koordinaten:

$$dA = dy \cdot dx$$

in Polarkoordinaten:

$$dA = r d\phi \cdot dr$$





Die Größe der blauen Fläche (= dA) ergibt sich (näherungsweise) zu $rd\phi \cdot dr$. Im Doppelintegral taucht also ein zusätzlicher Faktor r auf.

in kartesischen Koordinaten:

$$\int_G z(x,y)\; dA$$

$$\int_{x_u}^{x_o}\int_{f_u(x)}^{f_o(x)} z(x,y)\; dy\,dx$$

in Polarkoordinaten:

$$\int_G z(x,y)\; dA$$

$$x = r\cos\phi$$

$$y = r\sin\phi$$

$$\int_{r_1}^{r_2}\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} z(r\cos\Phi, r\sin\Phi)\; \overbrace{r\; d\phi\, dr}$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

<u>Bestimmung der Radien:</u>

innerer Radius = untere Integrationsgrenze
äußerer Radius = obere Integrationsgrenze

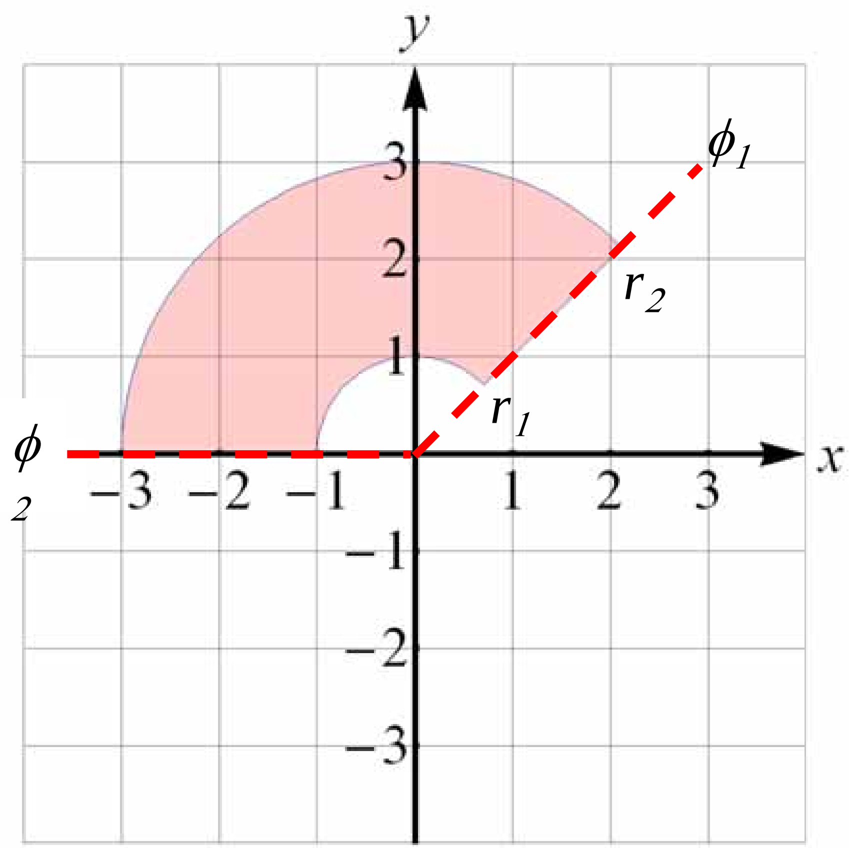
<u>Zur Bestimmung der eingrenzenden Winkel:</u>

Die Fläche wird gegen den Uhrzeigersinn überstrichen. Zuerst Winkel ϕ_1 dann ϕ_2:

ϕ_1 = untere Integrationsgrenze
ϕ_2 = obere Integrationsgrenze

$\boxed{\text{Es muss gelten } \phi_1 < \phi_2}$

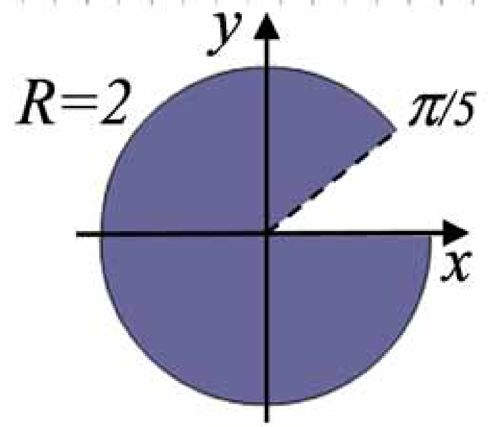
$$\int_{r_1}^{r_2} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} z(r\cos\Phi, r\sin\Phi)\; r\, d\phi dr$$



Beispiel: für das eingefärbte Integrationsgebiet gilt

$$\int_{1}^{3} \int_{\pi/4}^{\pi} z(r\cos\Phi, r\sin\Phi)\; r\, d\phi dr$$

Beispiel: Gesucht ist das Flächenträgheitsmoment I_x der abgebildeten Fläche.
(Allgemein werden Flächenträgheitsmomente mit Hilfe von Doppelintegralen berechnet, wobei das Integrationsgebiet durch den entsprechenden (Balken-) Querschnitt definiert ist.)



Es gilt: $I_x = \int_G y^2 dA$

Integration in Polarkoordinaten:

$$I_x = \int_G y^2 dA = \int_0^2 \int_{\pi/5}^{2\pi} r^3 \cdot \sin^2\phi \, d\phi dr \overset{1)}{=} \int_0^2 r^3 dr \cdot \int_{\pi/5}^{2\pi} \sin^2\phi \, d\phi \overset{2)}{=} \int_0^2 r^3 dr \cdot \int_{\pi/5}^{2\pi} \frac{1}{2}\left(1-\cos(2\phi)\right) d\phi$$

$$= \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^2 \cdot \frac{1}{2}\left[\phi - \frac{1}{2}\sin(2\phi)\right]_{\pi/5}^{2\pi} = 4\frac{1}{2}\left\{2\pi - \frac{1}{5}\pi - \frac{1}{2}\left(\sin\left(4\pi\right) - \sin\left(\frac{2}{5}\pi\right)\right)\right\} \approx 12.2608$$

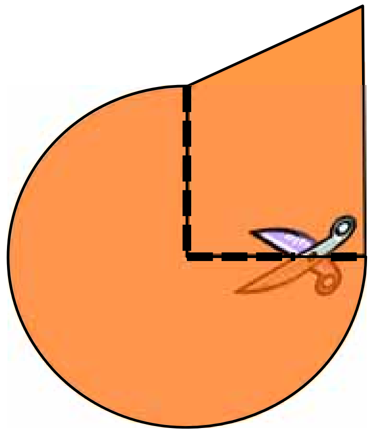
1) Da die Voraussetzungen erfüllt sind, kann das Doppelintegral als Produkt zweier Einfachintegrale geschrieben werden (vergl. Folie 13).
2) Es gilt: $\sin^2\phi = \frac{1}{2}\left(1-\cos(2\phi)\right)$

Doppelintegrale → Unterteilen von Integrationsgebieten

Wie bei einfachen Integralen, können Integrationsgebiete auch bei Doppelintegralen geteilt werden: $\int_{G_1+G_2} z(x,y)\;dA = \int_{G_1} z(x,y)\;dA + \int_{G_2} z(x,y)\;dA$

Man teilt das Integrationsgebiet so auf, dass über jedes Teilgebiet in **angepassten Koordinaten** integriert werden kann.

Beispielsweise bietet sich beim rechts abgebildeten Integrationsgebiet folgende Aufteilung an:

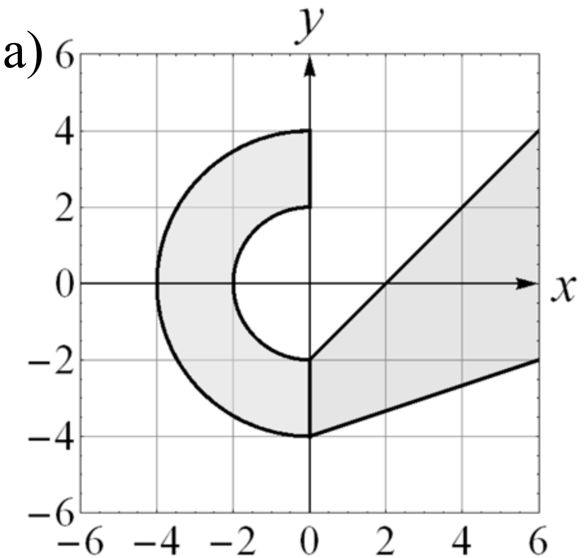


$\int$  $z(x,y)\;dA =$ $\int$  $z(x,y)\;dA$ $+$ $\int$  $z(x,y)\;dA$

$$\int z(x,y)\;dA = \int_{r_1}^{r_2}\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} z(r\cos\Phi, r\sin\Phi)\,r\;d\phi\,dr + \int_{x_u}^{x_o}\int_{f_u(x)}^{f_o(x)} z(x,y)\;dy\,dx$$

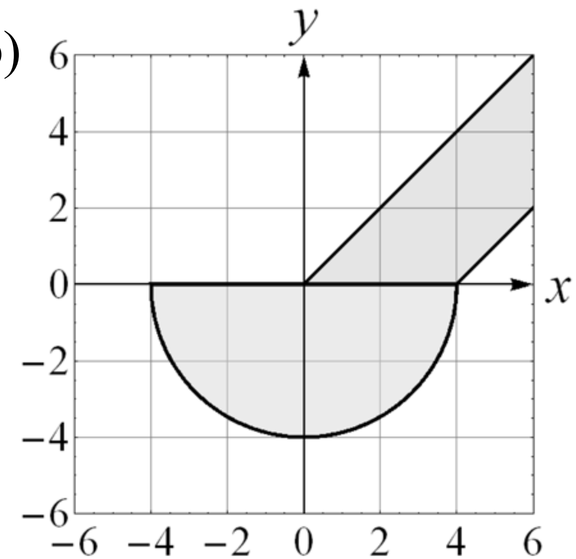
Übung: Bestimmen Sie geeignete Unterteilungen und die entsprechenden Integrationsgrenzen. Wie lauten die entsprechenden Doppelintegrale?
… die Integration selbst ist hier nicht gefragt.

a)



$$\int_G x^2 y \; dA =$$

b)

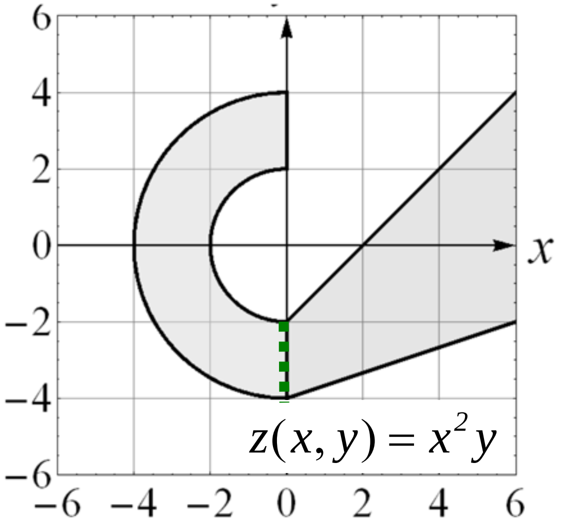


$$\int_G y \cdot (x^2 + y^2) \; dA =$$

zur Kontrolle s. nächste Seite.

<u>Lösung:</u>

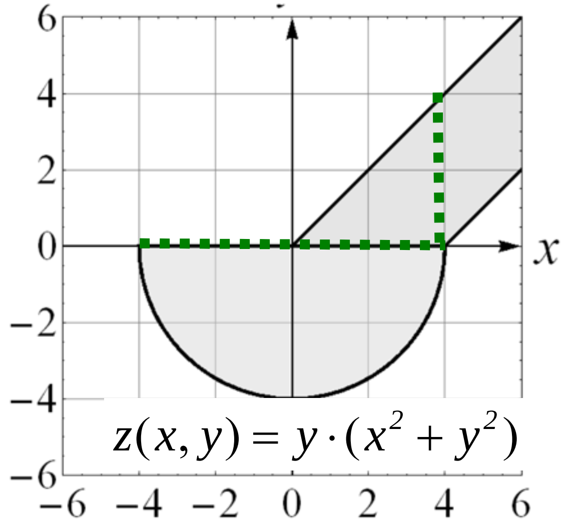
a) Linke Seite mit Polarkordinaten, rechts kartesisch:



$$\int_G z(x,y)dA = \int_{G1} z(x,y)dA + \int_{G2} z(x,y)dA$$

$$= \int_2^4 \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} r^4 \cos^2(\phi)\sin(\phi)d\phi dr + \int_0^6 \int_{\frac{1}{3}x-4}^{x-2} x^2 y\, dydy$$

b) Hier muss in drei Gebiete aufgeteilt werden: Halbkreis, Dreieck, Viereck



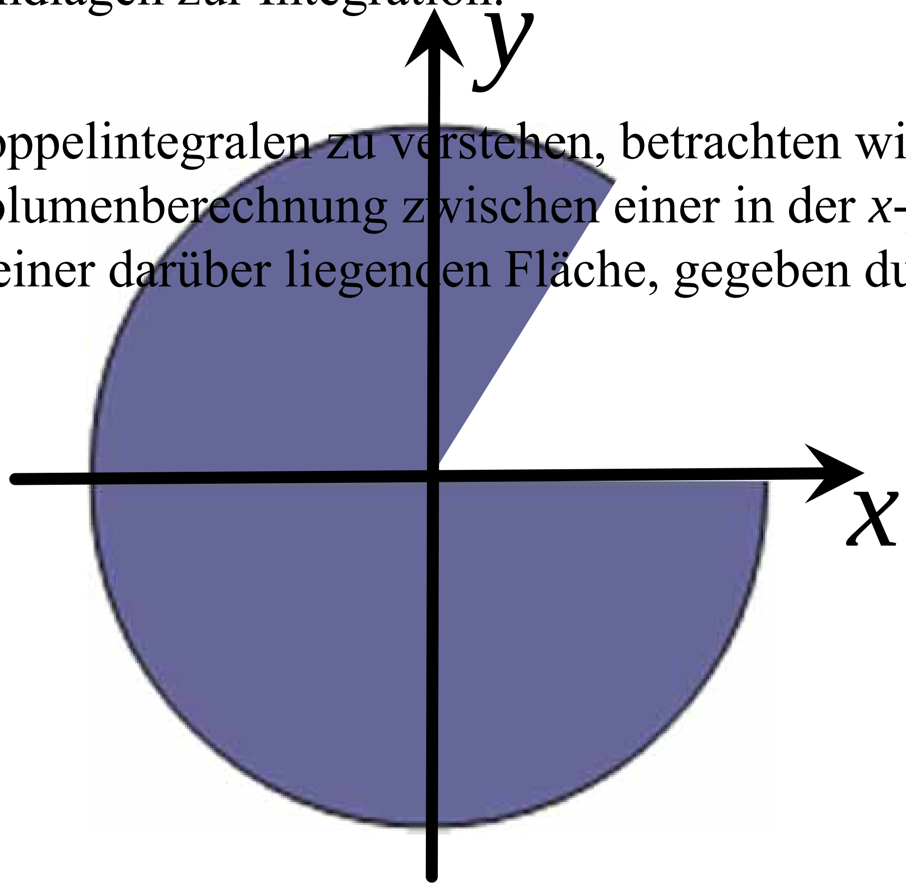
$$\int_G z(x,y)dA = \int_{G1} z(x,y)dA + \int_{G2} z(x,y)dA + \int_{G3} z(x,y)dA$$

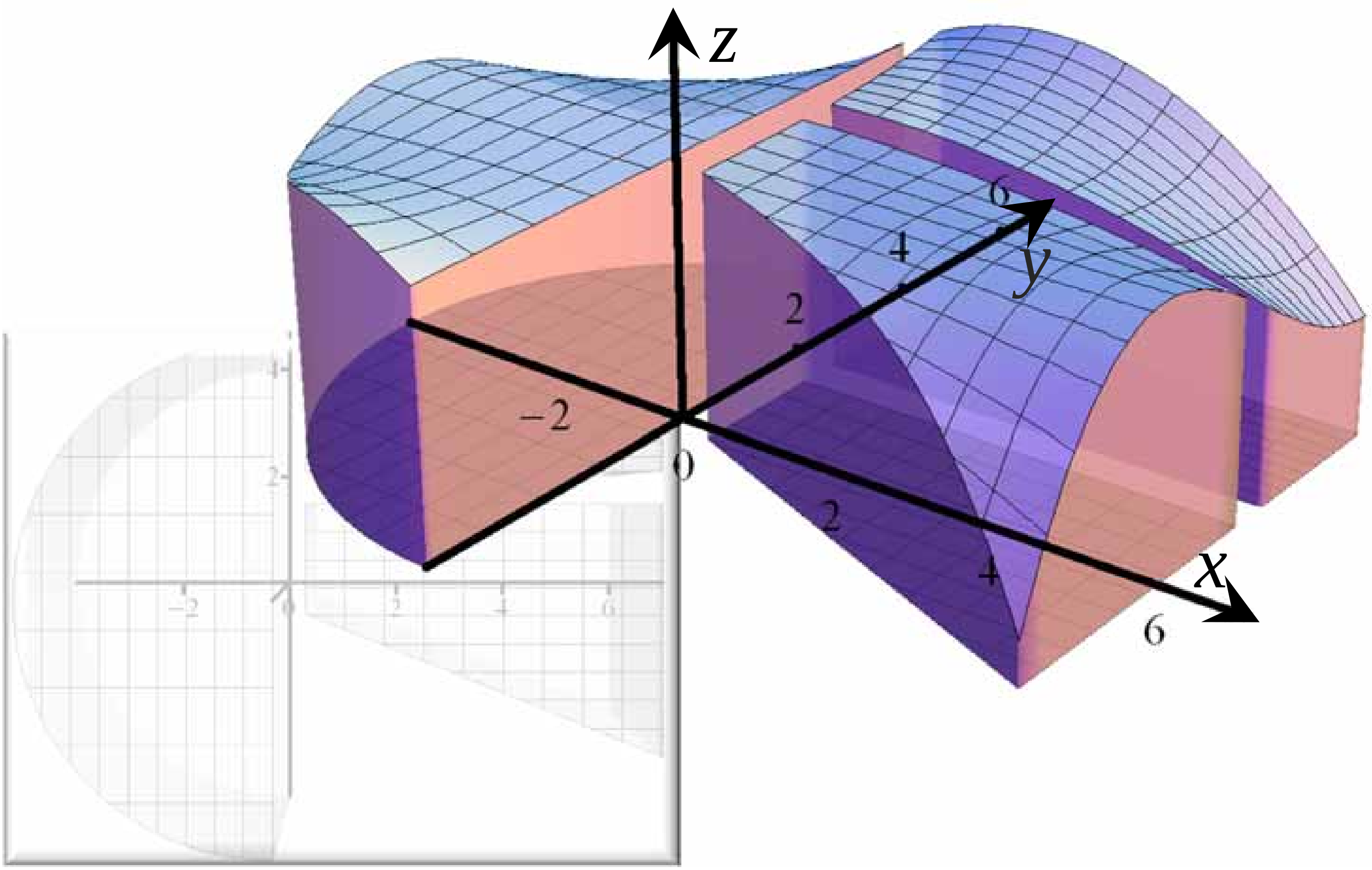
$$= \int_2^4 \int_{\pi}^{2\pi} r^4 \sin(\phi)d\phi dr + \int_0^4 \int_0^x y\cdot(x^2+y^2)\,dydy$$

$$+ \int_4^6 \int_{x-4}^{x} y\cdot(x^2+y^2)\,dydy$$

Doppelintegrale werden eingeführt, weiterhin wird die Bestimmung der Integrationsgrenzen und die Integration in kartesischen - und in Polarkoordinaten besprochen. Vorwissen: Grundlagen zur Integration.

Um die Grundidee hinter Doppelintegralen zu verstehen, betrachten wir als einführendes Beispiel die Volumenberechnung zwischen einer in der x-y-Ebene liegenden Grundfläche und einer darüber liegenden Fläche, gegeben durch eine Funktion $z(x,y)$.




z
y
x
−2
0
2
4
6
2
4
6