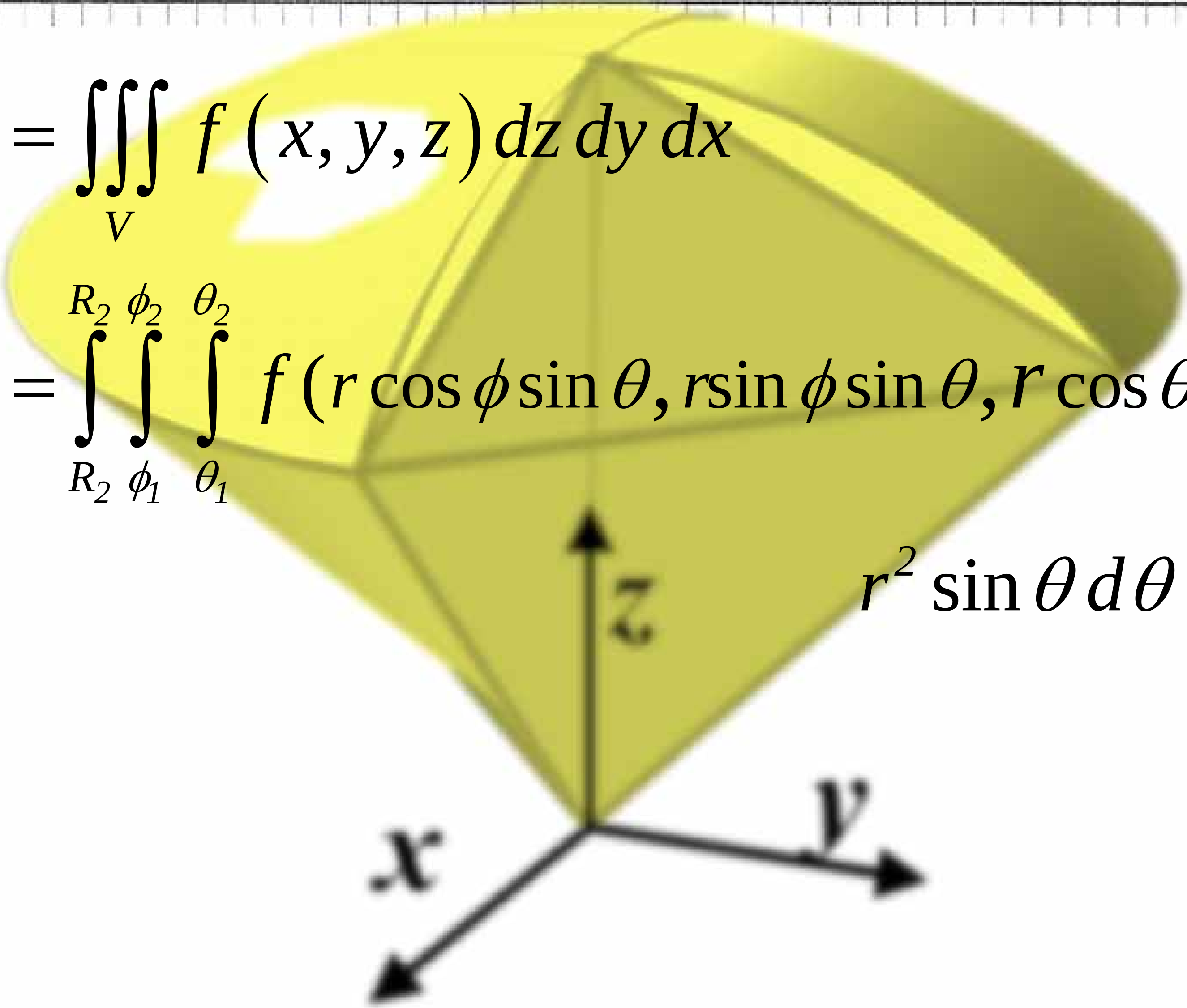
$$\int_V f\, dV = \iiint_V f\left(x,y,z\right) dz\, dy\, dx$$

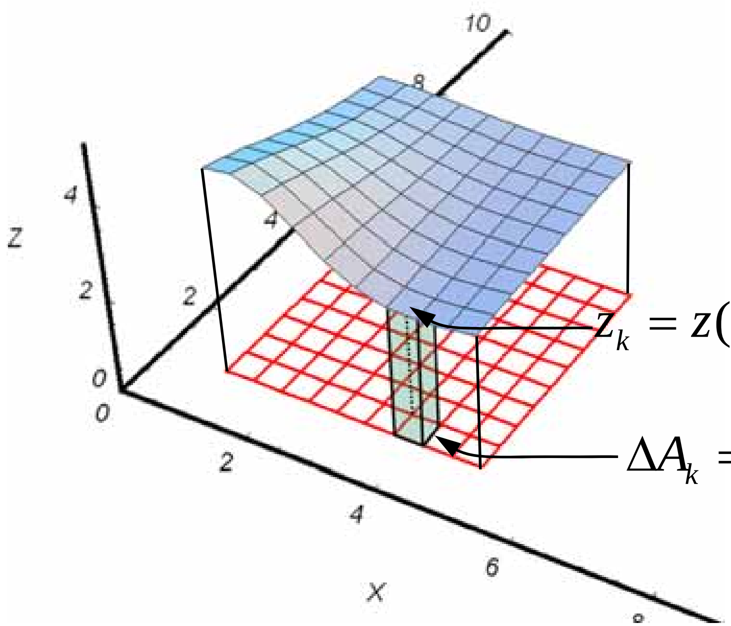
$$= \int_{R_2}^{R_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f\left(r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta\right) r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi dr$$



Als Vorwissen sollten Sie die Grundlagen zu Doppelintegralen mitbringen

(s. z.B. L. Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2).

Wie Sie dann wissen, werden bei Doppelintegralen 'Funktionswerte über einem Gebiet aufsummiert'.



$$z_k = z(x_i, y_j)$$

$$\Delta A_k = \Delta y_j \cdot \Delta x_i$$

Wiederholung Doppelintegral:

$$\Delta V_k \approx z_k \cdot \Delta A_k$$

$$V \approx \sum_{k=1}^{\dots} z_k \cdot \Delta A_k$$

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} z(x_i, y_j) \cdot \Delta A_{i,j}$$

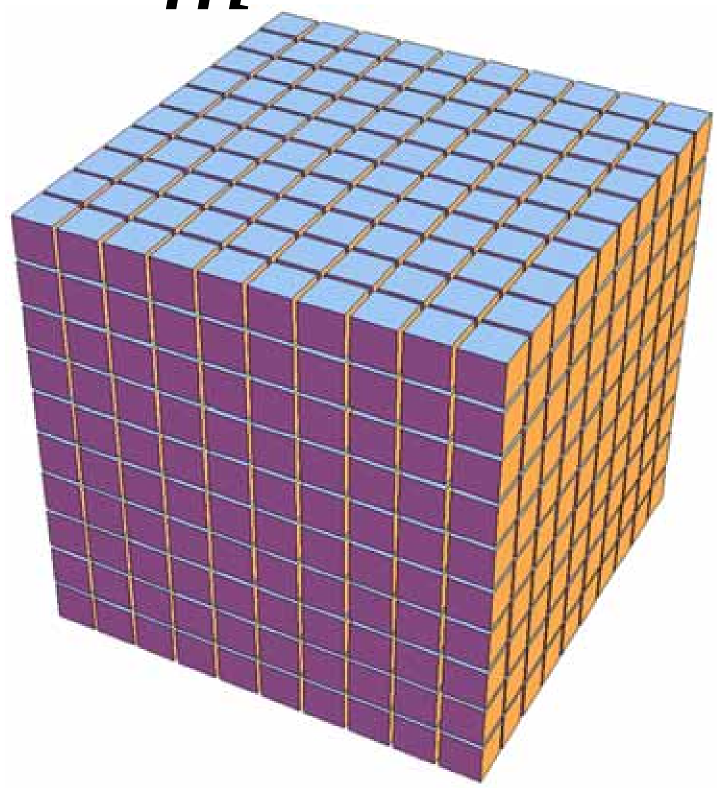
Definition: Doppelintegral

$$V = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta A \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} z(x_i, y_j) \cdot \Delta y_j \Delta x_i$$

$$V = \iint_G z(x, y)\, dy dx$$

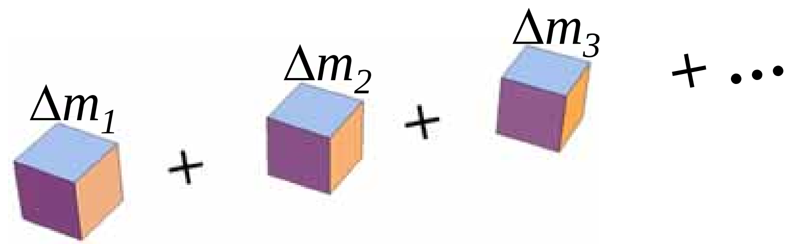
Dreifachintegrale → einführendes Beispiel

Das von den Doppelintegralen bekannte Vorgehen lässt sich auf dreidimensionale Körper übertragen. Als einführendes Beispiel betrachten wir die Berechnung der Masse m eines Volumenkörpers.



Die Gesamtmasse ergibt sich durch Summation aller Teilmassen Δm_i:

$=$



In Formeln: $m = \sum_{k=1}^{n} \Delta m_k$ mit $\Delta m_k \approx \rho_k \cdot \Delta V$

$$\approx \sum_{k=1}^{n} \rho_k \cdot \Delta V$$

ρ_k = mittlere Dichte des Masseneelements k

ΔV = Volumen eines (jeden) Masseneelements

Dreifachintegrale → einführendes Beispiel

Wie üblich, geschieht der Übergang zum Integral durch die Betrachtung des Grenzwertes einer 'unendlich feinen' Summe:

$$m \approx \sum_{k=1}^{n} \rho_k \cdot \Delta V \quad \text{mit } \rho_k = \rho\left(x_k, y_k, z_k\right)$$

$$m = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta V\to 0}} \sum_{k=1}^{n} \rho\left(x_k, y_k, z_k\right) \cdot \Delta V = \int_V \rho\left(x, y, z\right) dV$$

Die hier verwendete Schreibweise ist etwas abstrakt, so dass das dreifache Integral nicht klar zu erkennen ist. Anstelle der einfachen Summe über *k*, bei der jedes Massenelement durch einen Index gekennzeichnet ist, kann jedes Massenelement anschaulicher durch drei Indizes (*i*, *j*, *k*) 'adressiert' werden:

$$\rho_k \longrightarrow \rho\left(x_i, y_j, z_k\right)$$

$$m \approx \sum_{i}^{n_x} \sum_{j}^{n_y} \sum_{k=1}^{n_z} \rho\left(x_i, y_j, z_k\right) \cdot \Delta V \quad \text{mit } \Delta V = \Delta z \Delta y \Delta x$$

$$m = \lim_{\substack{n_x, n_y, n_z \to\infty \\ \Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0}} \sum_{i}^{n_x} \sum_{j}^{n_y} \sum_{k=1}^{n_z} \rho\left(x_i, y_j, z_k\right) \cdot \Delta z \Delta y \Delta x = \iiint_V \rho\left(x, y, z\right) dz\, dy\, dx$$

Dreifachintegrale → allgemeine Definition

Zur Integration einer allgemeinen Funktion $f(x,y,z)$ geht man entsprechend vor: man unterteilt den Integrationsbereich (hier: das Integrationsvolumen V) in kleine Teilbereiche (ΔV) und nähert das Integral
über einen solchen Teilbereich durch den Ausdruck $f\left(x_k, y_k, z_k\right) \cdot \Delta V$.

Der Grenzwert der Summe über alle Teilbereiche definiert das Integral:

$$\boxed{\begin{aligned} I &= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta V \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k, y_k, z_k\right) \cdot \Delta V \\ &= \int_V f\left(x, y, z\right) dV \\ &= \iiint_V f\left(x, y, z\right) dz\, dy\, dx \end{aligned}}$$

Dreifachintegrale → Anwendungsbeispiele

In der Schule werden Einfachintegrale (leider oft ausschließlich) zur Flächenberechnung herangezogen. Daneben gibt es aber beliebig viele weitere Anwendungen. Die Flächenberechnung ist lediglich ein, wenn auch sehr anschauliches, Beispiel zur Einfach-Integration.
Entsprechend ist die Volumenberechnung ein sehr anschauliches Beispiel zur Interpretation von Doppelintegralen.

Dreifachintegrale haben i.a. keine entsprechende *geometrische* Interpretation.

Nicht-geometrische Anwendungsbeispiele sind, neben der schon besprochenen Massenberechnung, z.B.

Thermische Energie: $W = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \Delta V\to 0}} \sum\limits_{k=1}^{n} \rho \cdot c_p \cdot T\left(x_k, y_k, z_k\right) \cdot \Delta V = \iiint\limits_V \rho \cdot c_p \cdot T\left(x, y, z\right) dz\, dy\, dx$

oder

Massenträgheitsmoment: $J_z = \rho \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right) dz\, dy\, dx$

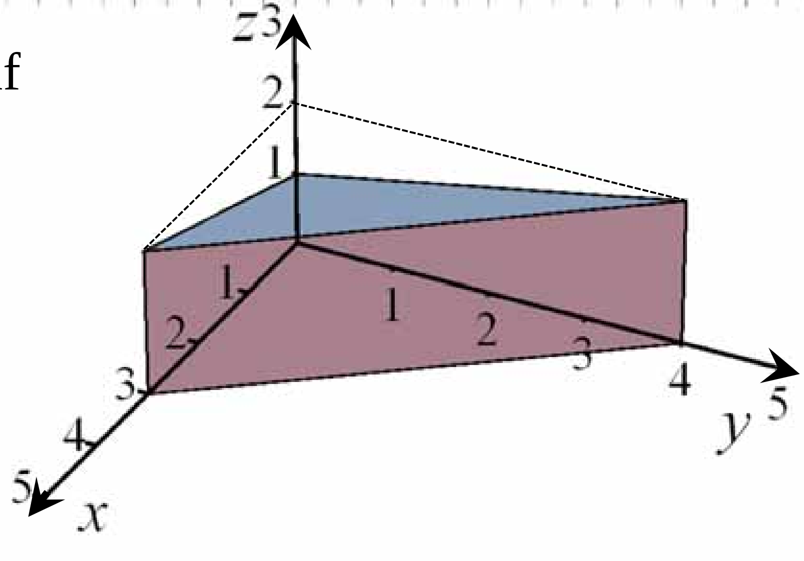
Bei der Berechnung verfährt man wie bei Doppelintegralen und integriert von ‚von innen nach außen' bzgl. der einzelnen Variablen.

Die jeweiligen Integrationsgrenzen sind durch die Geometrie des Integrationsbereichs festgelegt.

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx = \underbrace{\int_{x_u}^{x_o} \underbrace{\int_{y_u(x)}^{y_o(x)} \underbrace{\int_{z_u(x,y)}^{z_o(x,y)} f(x,y,z)\,dz}_{\text{1. (innerste) Integration: } z \text{ wird ‚eliminiert' (ausintegriert)}}\,dy}_{\text{2. Integration: } y \text{ wird ‚eliminiert' (ausintegriert)}}\,dx}_{\text{3. Integration bzgl. } x}$$

Wie bei Doppelintegralen, ist auf die Zuordnung zu achten: $\int$ & $d\ldots$ wirken jeweils wie eine Klammer.
Bei der links festgelegten Reihenfolge müssen die Integrationsgrenzen für *z* also am inneren Integral stehen, die *y*-Grenzen am Mittleren und die *x*-Grenzen außen.

Vor der eigentlichen Integration soll zunächst auf die Bestimmung der Integrationsgrenzen eingegangen werden. Betrachten wir das nebenstehend abgebildete Integrationsvolumen.



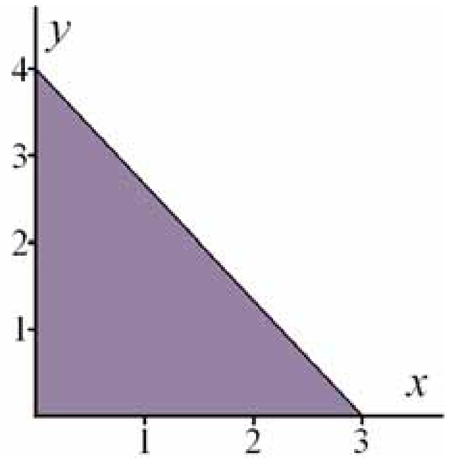
Die Grenzen der *z*-Integration ergeben sich aus den begrenzenden Funktionen (hier Ebenen) in *z*-Richtung.

Die Gleichung für die obere Ebene ergibt sich aus den Steigungen in *x*- und in *y*-Richtung sowie dem *z*-Achsenabschnitt: $z_o(x,y) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + 1$

$$z_u(x,y) = 0$$

Für die Grenzen der *y*-Integration betrachtet man die Projektion auf die *x*-*y*-Ebene. Die Grenzen ergeben sich (wie bei Doppelintegralen) aus den begrenzenden Funktionen für *y*:

$y_o(x) = -\frac{4}{3}x + 4$ und $y_u(x) = 0$.

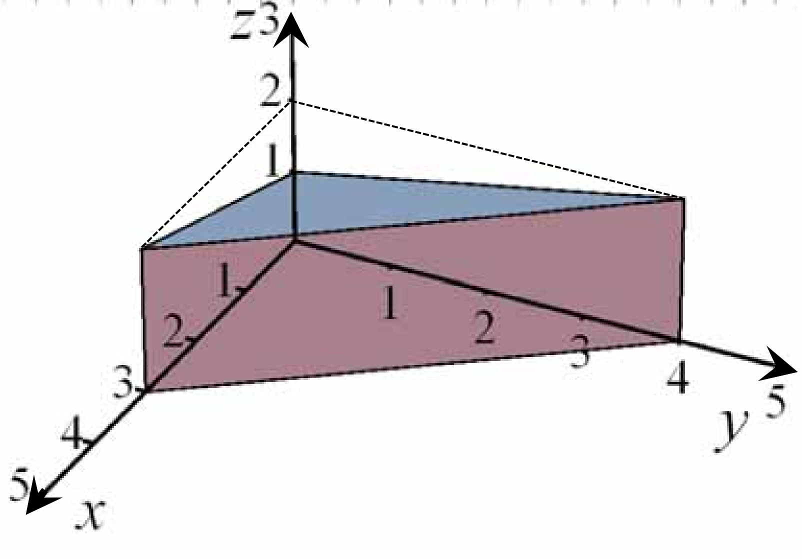


Für die *x*-Integrationsgrenzen gilt:

$x_o = 3$ und $x_u = 0$.

$$\int_V f(x,y,z)\,dV = \iiint_V f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^3 \int_0^{-\frac{4}{3}x+4} \int_0^{\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y+1} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$



Für ein erstes, einfaches Beispiel

setzten wir $f(x,y,z)=1$

$$\int_0^3 \int_0^{-\frac{4}{3}x+4} \int_0^{\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y+1} 1\ \ dz\,dy\,dx$$

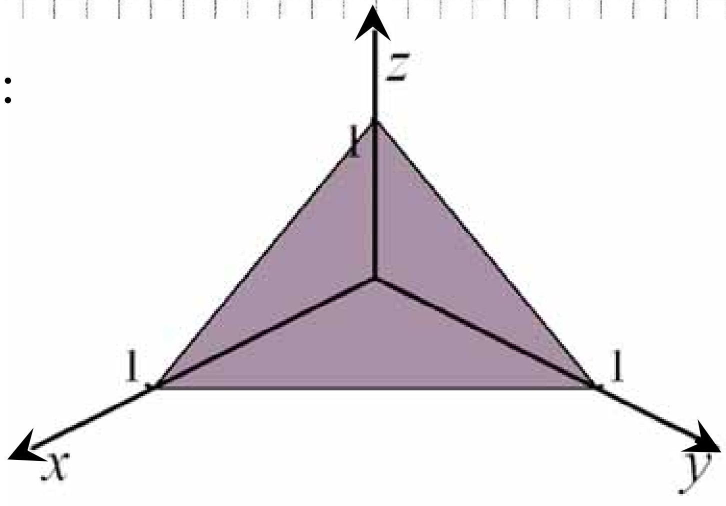
$$\int_0^{\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y+1} 1\ \ dz = [z]_0^{\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y+1} = \frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y+1$$

$$\int_0^{-\frac{4}{3}x+4} \frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y+1\,dy = \left[(\tfrac{1}{3}x+1)y+\tfrac{1}{8}y^2\right]_0^{-\frac{4}{3}x+4} = (\tfrac{1}{3}x+1)(-\tfrac{4}{3}x+4)+\tfrac{1}{8}(-\tfrac{4}{3}x+4)^2-0$$

$$= -\tfrac{4}{9}x^2+\tfrac{4}{3}x-\tfrac{4}{3}x+4+\tfrac{2}{9}x^2-\tfrac{4}{3}x+2 = -\tfrac{2}{9}x^2-\tfrac{4}{3}x+6$$

$$\int_0^3 -\tfrac{2}{9}x^2-\tfrac{4}{3}x+6\ \ dx = \left[-\tfrac{2}{27}x^3-\tfrac{4}{6}x^2+6x\right]_0^3 = -2-6+18-0=10$$

Gegeben ist das abgebildete Integrationsvolumen V:



Berechnen Sie:

$$\int_V 1\,dV$$

$$\int_V xy\,dV$$

$$\int_V x\sin(z)\,dV$$

zur Kontrolle die Ergebnisse: $\int_V 1\,dV = \frac{1}{6}$, $\quad \int_V xy\,dV = \frac{1}{120}$ $\quad \int_V x\sin(z)\,dV = 0.008138$

Dreifachintegrale → vereinfachte Berechnung

Unter folgenden Voraussetzungen lässt sich die Berechnung von Dreifachintegralen vereinfachen:

1. Die Integrationsgrenzen <u>für alle drei</u> Veränderliche sind konstant

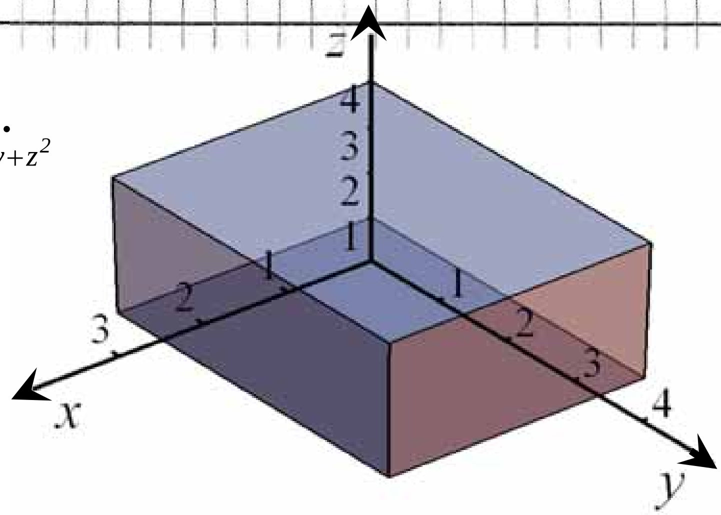
2. Der Integrand $f(x,y,z)$ lässt sich in ein Produkt zerlegen, wobei die Faktoren jeweils nur von x, nur von y und nur von z abhängen, also $f(x,y,z) = u(x)\cdot v(y)\cdot w(z)$

Dann (und nur dann!) gilt:

$$\boxed{\int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx = \left(\int_a^b u(x)\, dx\right) \cdot \left(\int_c^d v(y)\, dy\right) \cdot \left(\int_e^f w(z)\, dz\right)}$$

Unter den Voraussetzungen 1. & 2. lässt sich also ein Dreifachintegral als Produkt dreier Einfachintegrale schreiben.

Gegeben ist das abgebildete Integrationsvolumen V.
Integriert werden soll die Funktion: $f\left(x,y,z\right)=xze^{y+z^2}$



$$\int\limits_V f\left(x,y,z\right)dV=\iiint\limits_V xze^{y+z^2}\,dz\,dy\,dx=$$

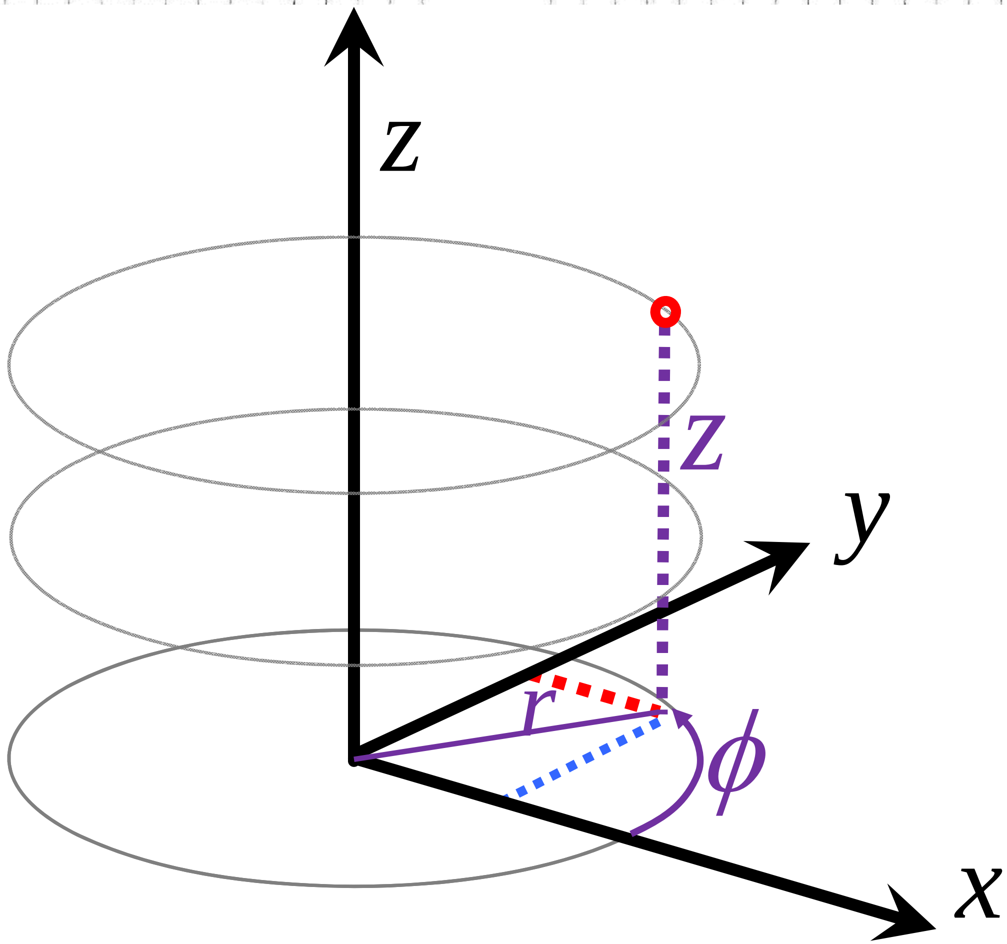
$$=\int\limits_0^3\int\limits_0^4\int\limits_1^4 x\cdot e^y\cdot ze^{z^2}\,dz\,dy\,dx \overset{\text{Vor. 1. \& 2. erfüllt}}{=} =\left(\int\limits_0^3 xdx\right)\cdot\left(\int\limits_0^4 e^y dy\right)\cdot\left(\int\limits_1^4 ze^{z^2}dz\right)$$

Substitution:
$u=z^2$

$$\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^3\cdot\left[e^y\right]_0^4\cdot\left[\tfrac{1}{2}e^{z^2}\right]_1^4$$

$$\left(\tfrac{9}{2}\right)\cdot\left(e^4-1\right)\cdot\tfrac{1}{2}\left(e^{16}-e\right)\approx 10^9$$

Dreifachintegrale in Zylinderkoordinaten



In Zylinderkoordinaten werden x und y durch Polarkoordinaten beschrieben. Die z-Koordinate bleibt unverändert. Es gilt also:

$$x = r\cdot\cos(\phi)$$
$$y = r\cdot\sin(\phi)$$
$$z = z$$

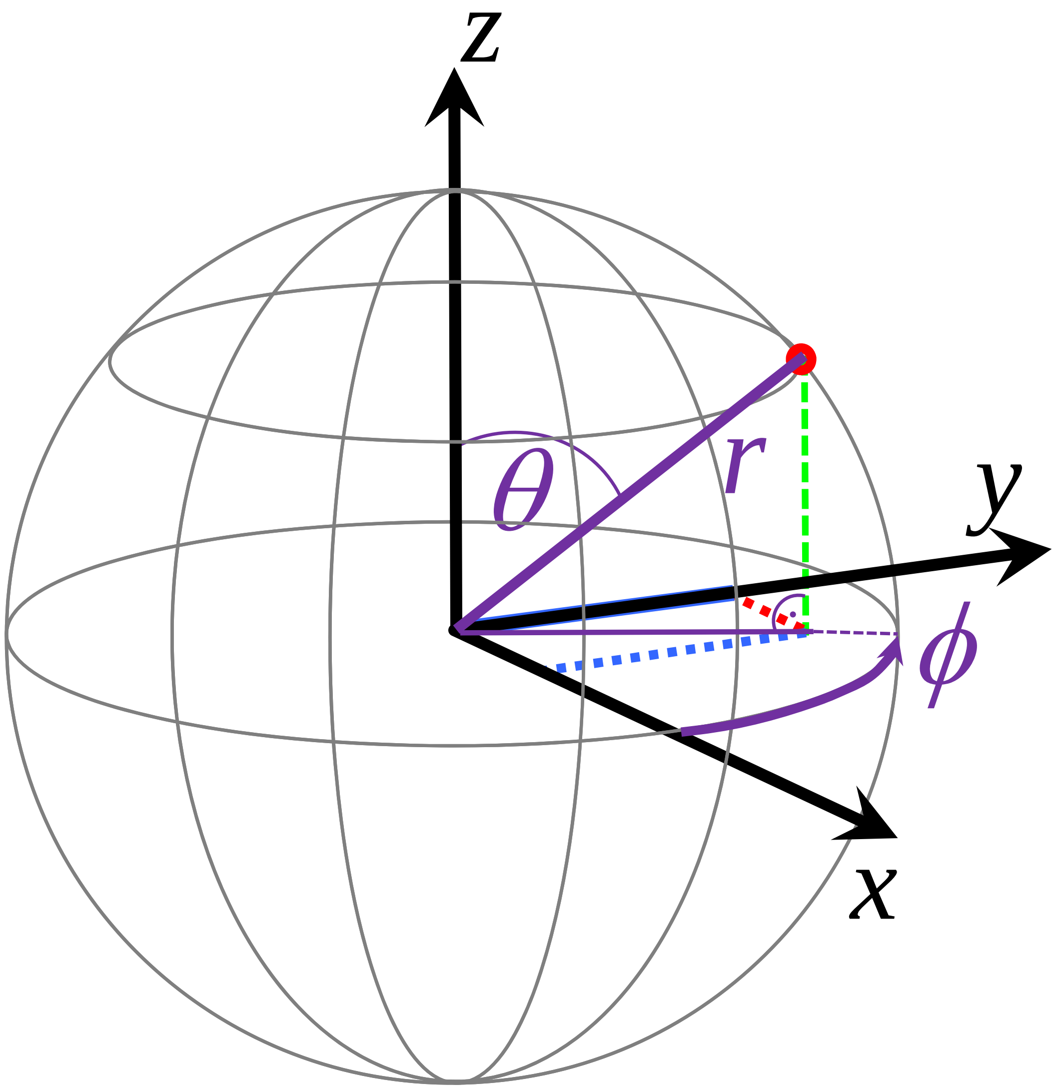
Für das Volumenelement gilt entsprechend $dV = dz\,dy\,dx$

$$\downarrow$$

$$dV = r\;d\phi\,dr\,dz$$

(Flächenelement in Polarkoordinaten mal dz)

Dreifachintegrale in Kugelkoordinaten



In Kugelkoordinaten werden x und y wieder in Polarkoordinaten beschrieben. Der entsprechende Radius (Projektion auf die x-y-Ebene) hängt jedoch jetzt vom Polarwinkels θ ab.

Auch die z-Koordinate wird mit Hilfe des Polarwinkels θ ausgedrückt:

$$x = r \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\theta)$$
$$y = r \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(\theta)$$
$$z = r \cdot \cos(\theta)$$

Für das Volumenelement gilt:

$$dV = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, dr$$

zur Herleitung siehe z.B.

T. Arens et al., Mathematik, Spektrum

kartesische Koordinaten

$$\int\limits_V \quad f\left(x, y, z\right) \quad dV$$

$$\int\limits_{x_u}^{x_o} \int\limits_{y_u(x)}^{y_o(x)} \int\limits_{z_o(x,y)}^{z_o(x,y)} f\left(x, y, z\right) dz\, dy\, dx$$

Zylinderkoordinaten

$$\int\limits_V \quad f(x, y, z) \quad dV$$

$$x = r\cos\phi$$

$$y = r\sin\phi$$

$$z = z$$

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} \int\limits_{R_1}^{R_2} \int\limits_{\Phi_1}^{\Phi_2} f(r\cos\phi, r\sin\phi, z)\,\overbrace{r\; d\phi\, dr\, dz}$$

Kugelkoordinaten

$$\int\limits_V \quad f(x, y, z) \quad dV$$

$$x = r\cdot\cos\phi\cdot\sin\theta$$

$$y = r\cdot\sin\phi\cdot\sin\theta$$

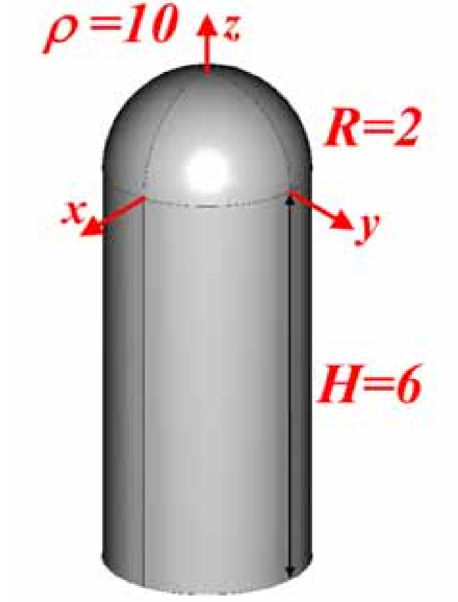
$$z = r\cdot\cos\theta$$

$$\int\limits_{R_2}^{R_2} \int\limits_{\phi_1}^{\phi_2} \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} f\left(r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta\right)\; \overbrace{r^2\sin\theta\;\; d\theta\, d\phi\, dr}$$

Dreifachintegrale → Beispiel für Zylinder- und Kugelkoordinaten

Gesucht ist das Massenträgheitsmoment des abgebildeten Körpers bzgl. der z-Achse: $J_z = \rho \int_V (x^2 + y^2) dV$.

(Zur Definition von J_z s. z.B. L. Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler 2).



$$J_z = \rho \int_V (x^2 + y^2) dV = \rho \int_{Zylinder} (x^2 + y^2)\, dV + \rho \int_{Kappe} (x^2 + y^2)\, dV$$

$$= \rho \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{-6}^0 \left(r^2 \cos^2\Phi + r^2 \sin^2\Phi\right) r\, dz\, d\Phi\, dr$$

$$= \rho \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{-6}^0 r^3\, dz\, d\Phi\, dr = 10 \left[\tfrac{1}{4} r^4\right]_0^2 [\Phi]_0^{2\pi} [z]_{-6}^0$$

$$= 10 \cdot \tfrac{1}{4} 16 \cdot 2\pi \cdot 6 = 480\pi = 1507.96$$

$$= \rho \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left(r^2 \cos^2\Phi \sin^2\theta + r^2 \sin^2\Phi \sin^2\theta\right) r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\Phi\, dr$$

$$= \rho \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\cos^2\Phi + \sin^2\Phi\right) r^4 \sin^3\theta\, d\theta\, d\Phi\, dr$$

$$= \rho \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} r^4 \sin^3\theta\, d\theta\, d\Phi\, dr$$

$$= 10 \left[\tfrac{1}{5} r^5\right]_0^2 [\Phi]_0^{2\pi} \left[-\tfrac{1}{3} \sin^2(\theta) \cos(\theta) - \tfrac{2}{3} \cos(\theta)\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 10 \cdot \tfrac{1}{5} 32 \cdot 2\pi \cdot \left(0 - (-\tfrac{2}{3} \cos(0))\right) = \tfrac{256}{3}\pi = 268.08$$