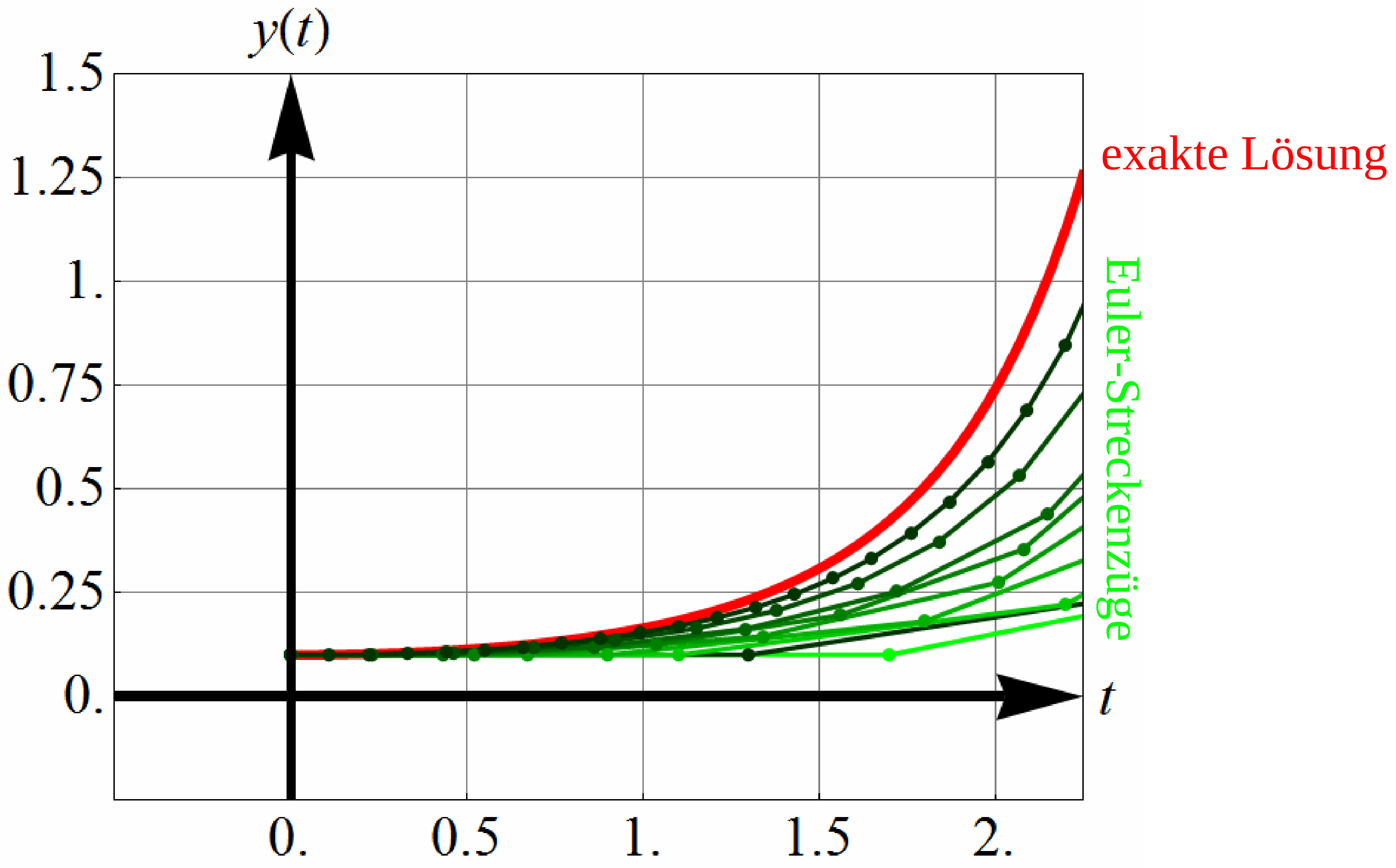
Euler-Verfahren



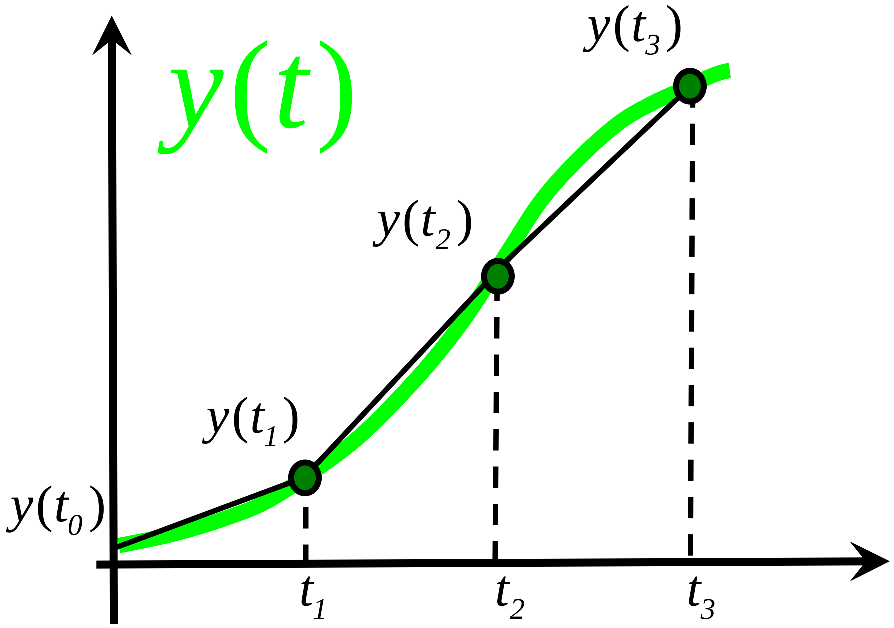
Ein paar grundlegende Anmerkungen zur Numerik

- Die Begriffe ‚Numerik' bzw. ‚Numerische Mathematik' bezeichnen ein Teilgebiet der Mathematik, welches sich im Wesentlichen mit Lösungsmethoden mit Hilfe von Computern beschäftigt.

- Da ein Computer nur eine begrenzte Anzahl von Zahlen bzw. Datenpunkten handhaben kann, werden kontinuierliche Funktion durch diskrete (endlich viele) einzelne ‚Stützstellen' beschrieben.

- Kennt man die Stützstellen, können Zwischenwerte durch Interpolation, z.B. mit geraden Strecken, ermittelt werden.

- Wir ‚begnügen' uns mit den Stützstellenwerten $y(t_i)$

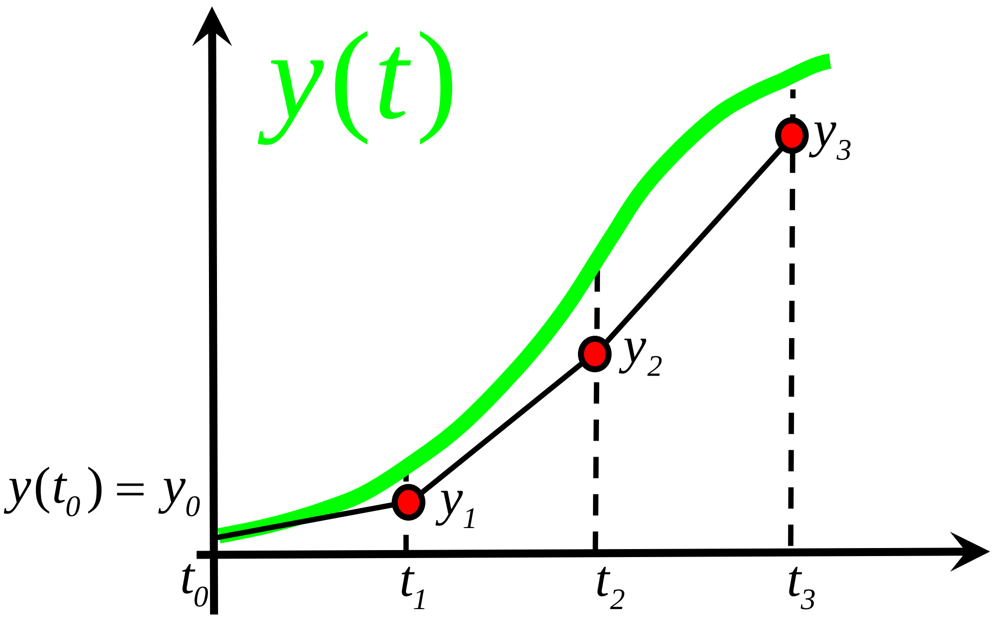


- Bei der numerischen Lösungen von Dgl.en, erhält man i.a. nur eine Näherung für die gesuchte Funktion, genauer für die gesuchten Stützstellenwerte.

  D.h. die numerisch berechneten Werte sind in der Regel nicht exakt (liegen nicht auf der Funktion).

  … hoffentlich liegen sie aber dicht dran.

- Die genäherten Stützstellenwerte bezeichnen wir mit y_i



Euler-Verfahren

Wir betrachten Dgl.en erster Ordnung …
und schreiben diese in expliziter Form: $y'(t) = f(t, y)$
Darüber hinaus sei jeweils eine
Anfangsbedingung gegeben: $y(t_0) = y_0$

Lösungsstrategie zur Berechnung
einer bestimmten Lösung:
Der Anfangswert ist genau gegeben: $(t_0,\ y_0)$

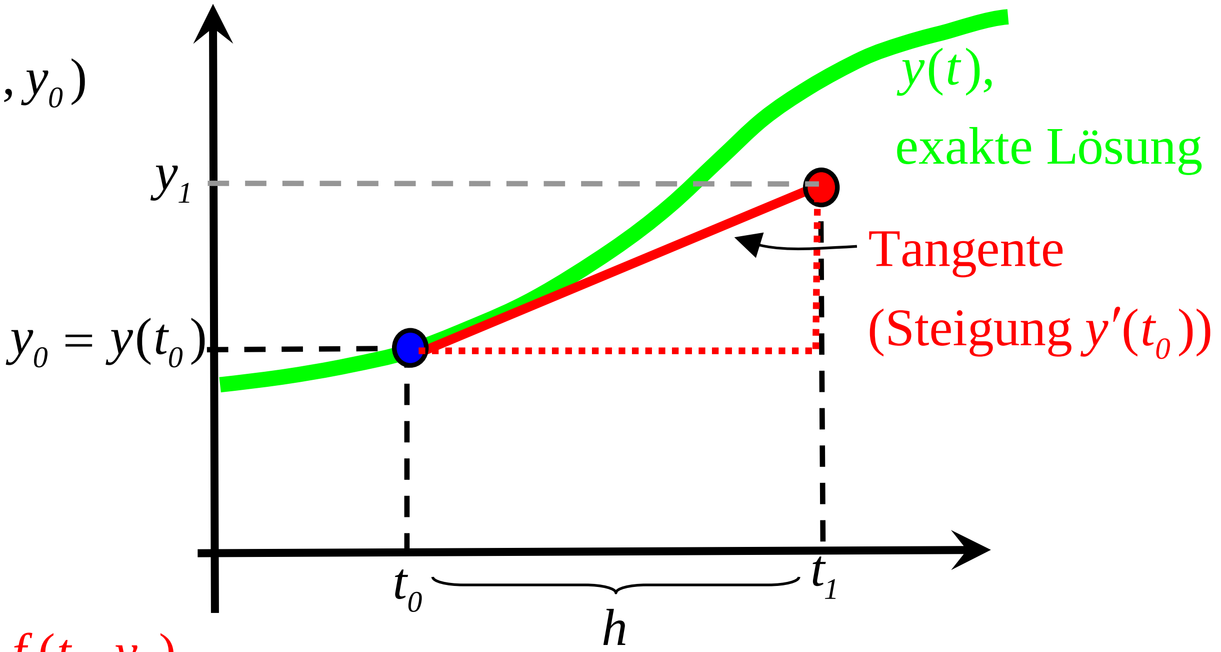
und damit kennt man auch
die Steigung der gesuchten
Funktion im Anfangspunkt: $y'(t_0) = f(t_0, y_0)$.

Man hangelt sich vom Anfangswert
ein kleines Stück (h) weiter und berechnet den Funktionswert
an der neuen Stelle näherungsweise:

Die Tangentensteigung

kann mit Hilfe der Dgl

bestimmt werden: $y'(t_0) = f(t_0, y_0)$



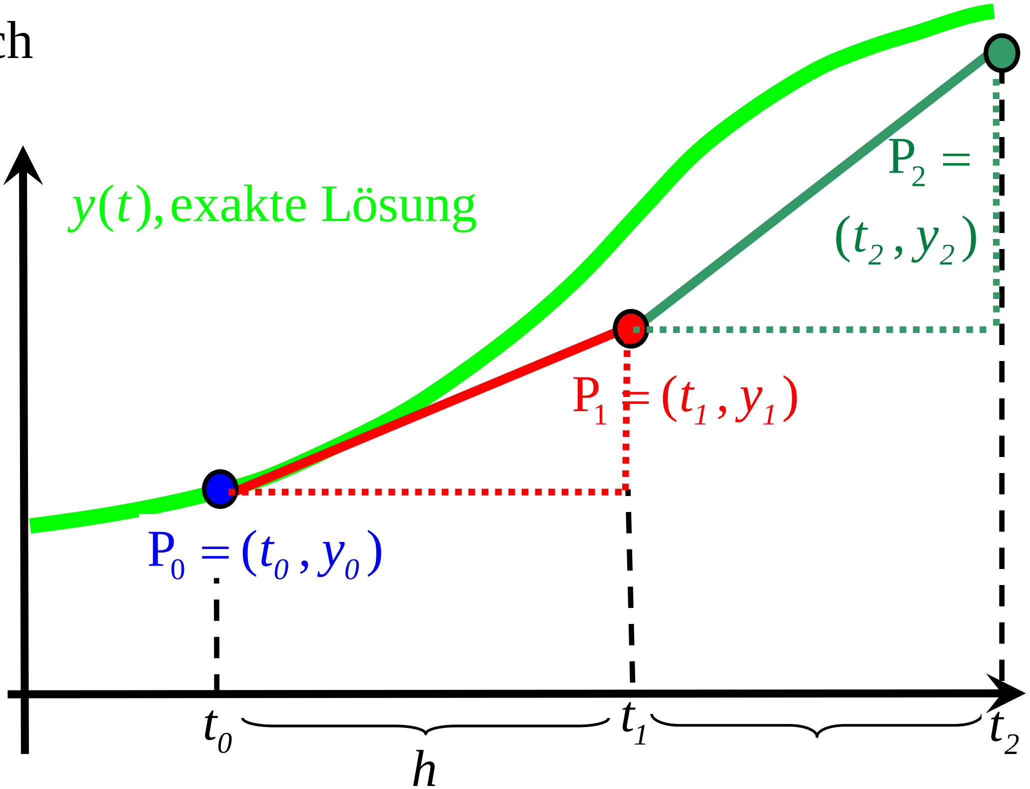
Außerdem gilt:

$$\frac{y_1 - y_0}{h} = \text{Tangentensteigung} = f(t_0, y_0)$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = y_0 + f(t_0, y_0) \cdot h$$

$$(t_1 = t_0 + h,\ y_1)$$

Mit Hilfe der Steigung hangelt man sich also vom Punkt P_0 zu P_1.



Anfangswert P_0,
genau gegeben: $(t_0,\ y_0)$

erster Näherungswert P_1:
$\left(t_1 = t_0 + h,\ \ y_1 = y_0 + f(t_0, y_0) \cdot h\right)$

Hat man P_1 berechnet, kann man sich in gleicher Art um ein weiteres Stück zu P_2 hangeln:

$$t_2 = t_1 + h$$

$$y_2 = y_1 + f(t_1, y_1) \cdot h$$

… und so weiter.

Euler-Verfahren

Insgesamt erhält man für
eine Dgl erster Ordnung $y'(t) = f(t, y)$
mit der Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$

die Iterationsvorschrift: $t_{i+1} = t_i + h, \quad y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i) \cdot h$

Als Beispiel betrachten wir die einfache Dgl $y'(t) = t \cdot y(t)$,
mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0.1$. Als Schrittweite wählen wir $h=0.4$.

Für die gegebene Dgl ist $f(t, y) = t \cdot y$

und gemäß der Anfangsbedingung gilt: $t_0 = 0, \; y_0 = 0.1$

$t_1 = t_0 + h = 0 + 0.4 = 0.4 \quad \rightarrow t_1 = 0.4$

$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0) \cdot h = 0.1 + 0 \cdot 0.1 \cdot 0.4 = 0.1 \quad \rightarrow y_1 = 0.1$

$t_2 = t_1 + h = 0.8 \quad \rightarrow t_2 = 0.8$

$y_2 = y_1 + f(t_1, y_1) \cdot h = 0.1 + 0.4 \cdot 0.1 \cdot 0.4 = 0.116 \quad \rightarrow y_2 = 0.116$

$t_3 = t_2 + h = 1.2 \quad \rightarrow t_3 = 1.2 \quad \ldots \; t_4 = 1.6$

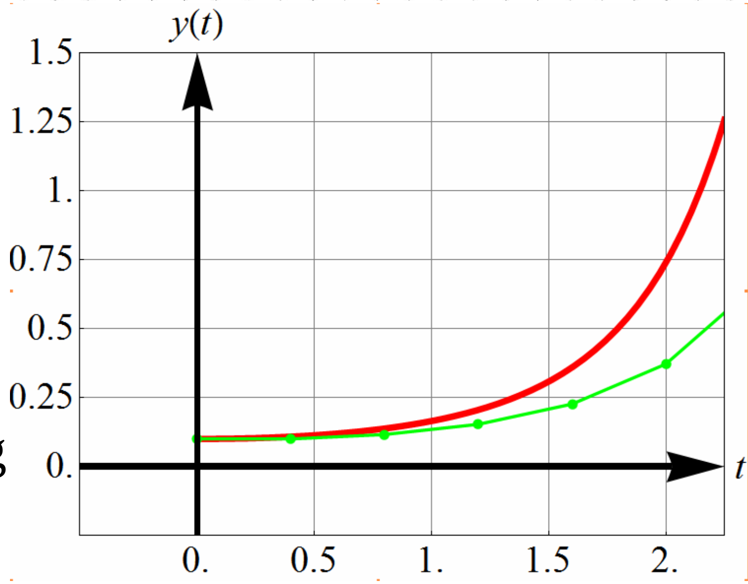
$y_3 = y_2 + f(t_2, y_2) \cdot h = 0.14 + 0.8 \cdot 0.116 \cdot 0.4 = 0.15312 \quad \rightarrow y_3 = 0.15312 \quad \ldots \; y_4 = 0.226618$

Euler-Verfahren

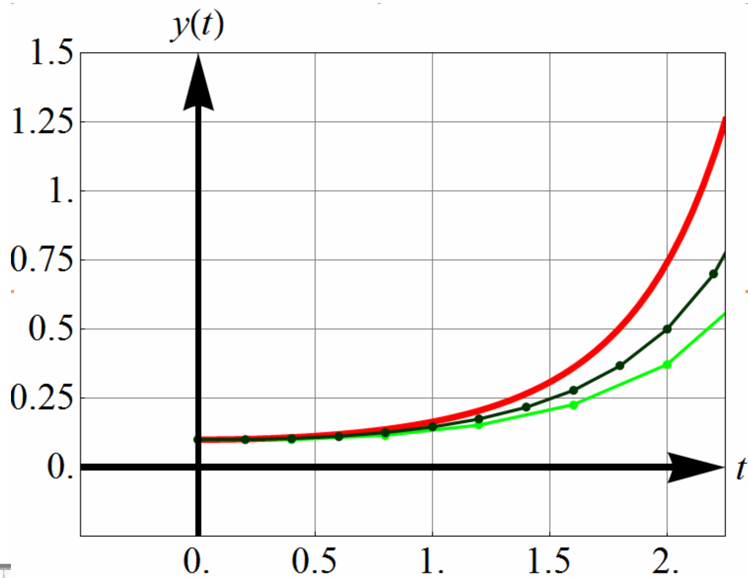
Dgl $y'(t) = t \cdot y(t)$
Anfangsbedingung $y(0) = 0.1$.

exakte Lösung: $y(t) = 0.1\ e^{0.5\,x^2}$
(z.B. mit Trennung der Variablen)

Die obere Grafik zeigt die Ergebnisse der Rechnung
(Euler-Verfahren mit Schrittweite $h=0.4$)

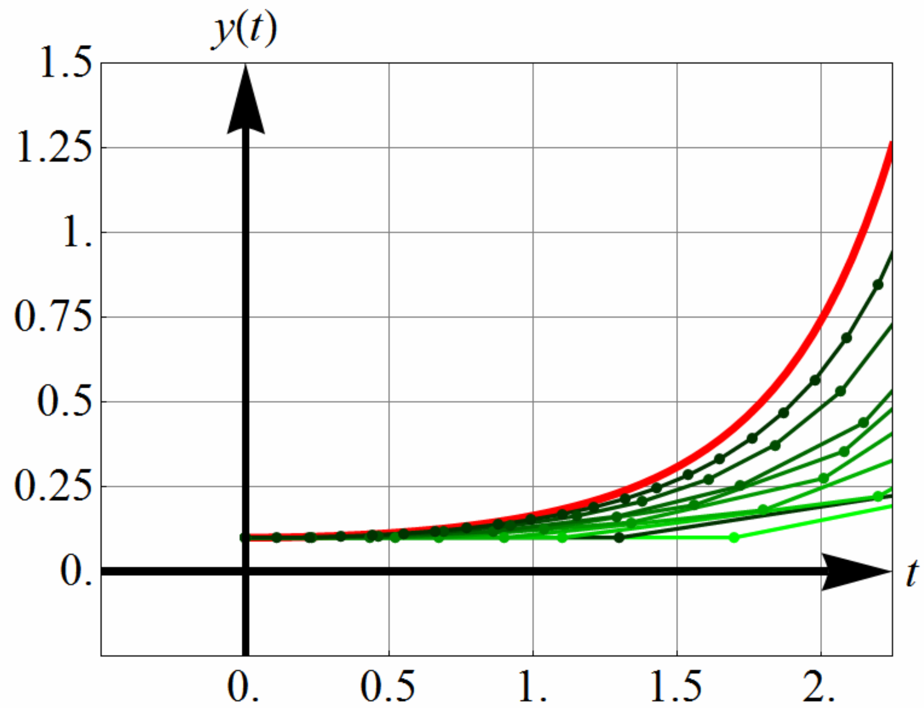


Zum Vergleich sind unten zusätzliche die Ergebnisse für eine kleinere Schrittweite, $h=0.2$, gezeigt.



Anmerkungen zum Euler-Verfahren

- Die Ergebnisse werden umso besser, je dichter die Stützstelle zusammen liegen, d.h. je kleiner *h* ist. Vergl. Abb. links



- Das Euler-Verfahren ist ein sehr einfache und robustes Verfahren zur numerischen Lösung von Dgl.en.

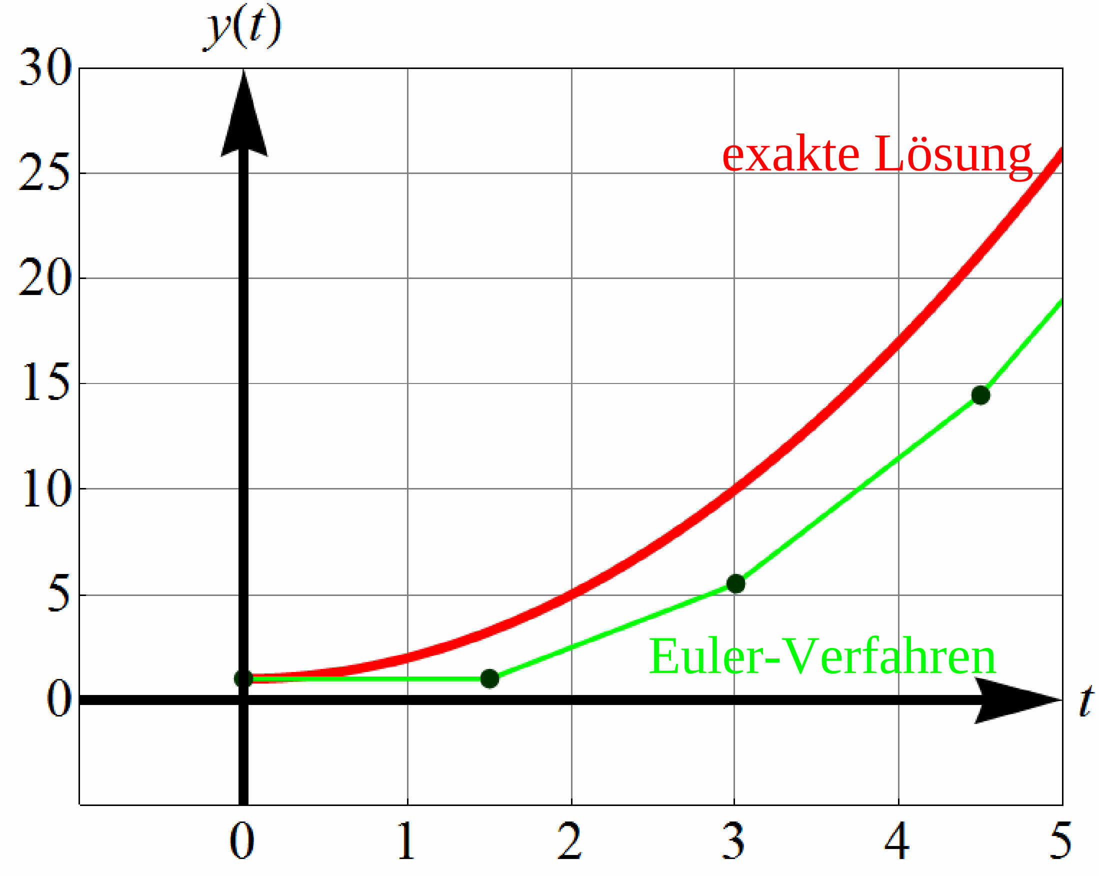
- Das Verfahren kann auf Dgl.en höherer Ordnung erweitert werden.

- Aufgrund des einfachen Zugangs hat das Euler-Verfahren allerdings einige ‚strukturelle' Schwächen (vergl. nächste Folie)

Anmerkungen zum Euler-Verfahren

Zu einer der Schwächen:
In dem gezeigten Fall einer links gekrümmten Lösungsfunktion, sind die nach Euler berechneten Tangentensteigungen immer zu klein, dadurch liegen die Ergebnisse des Euler-Verfahrens allesamt unter der exakten Kurve.

Bei rechts gekrümmten Funktionen ist es genau umgekehrt.



Genauere Ergebnisse erhält man, wenn statt des Euler-Verfahrens z.B. das ähnliche Runge-Kutta Verfahren angewendet wird. Hier wird die Tangentensteigung jeweils besser abgeschätzt … aber leider auch mit größerem Aufwand.