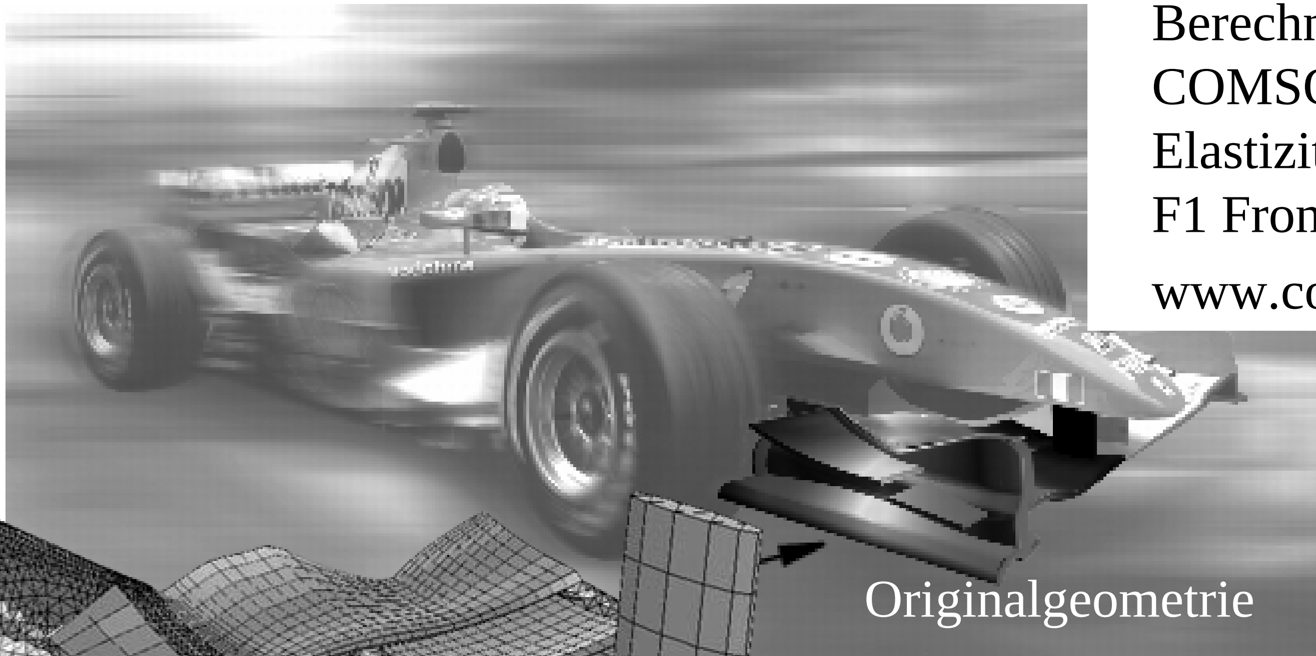
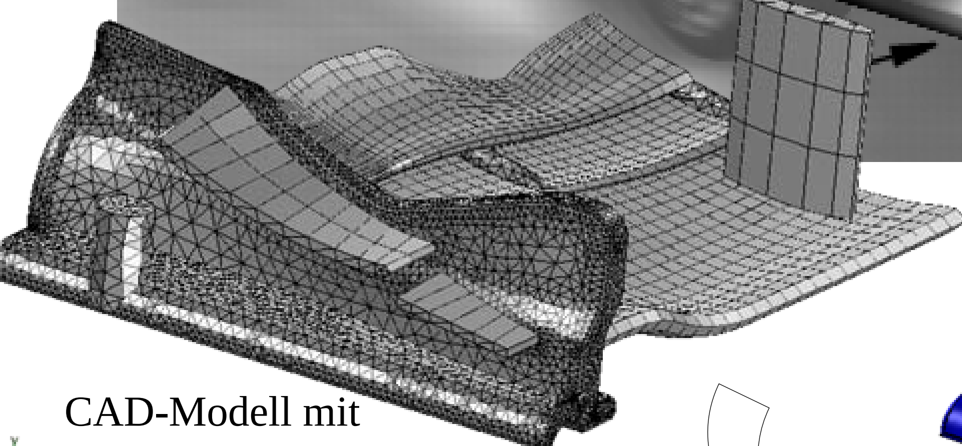
Einführung in FEM → Motivationsbeispiel

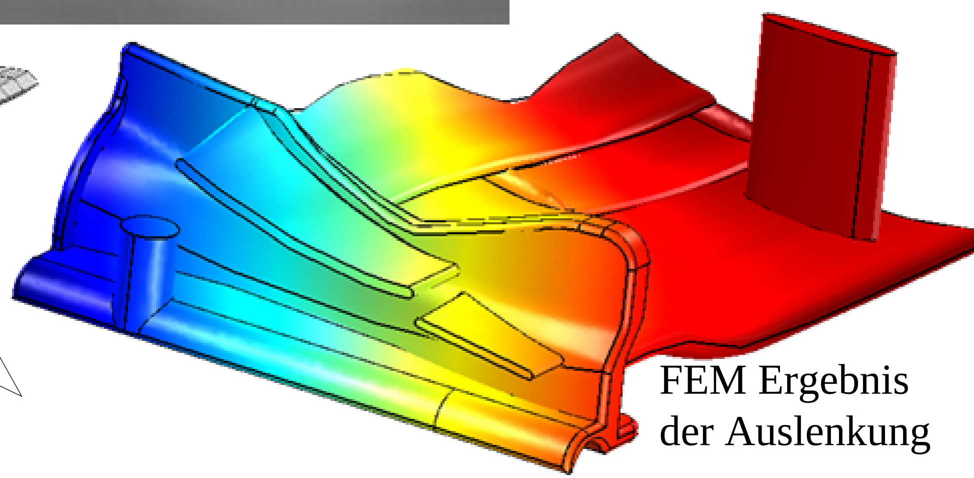
Berechnungsbeispiel COMSOL Multiphysics: Elastizitätsberechnung eines F1 Frontflügels.

www.comsol.de



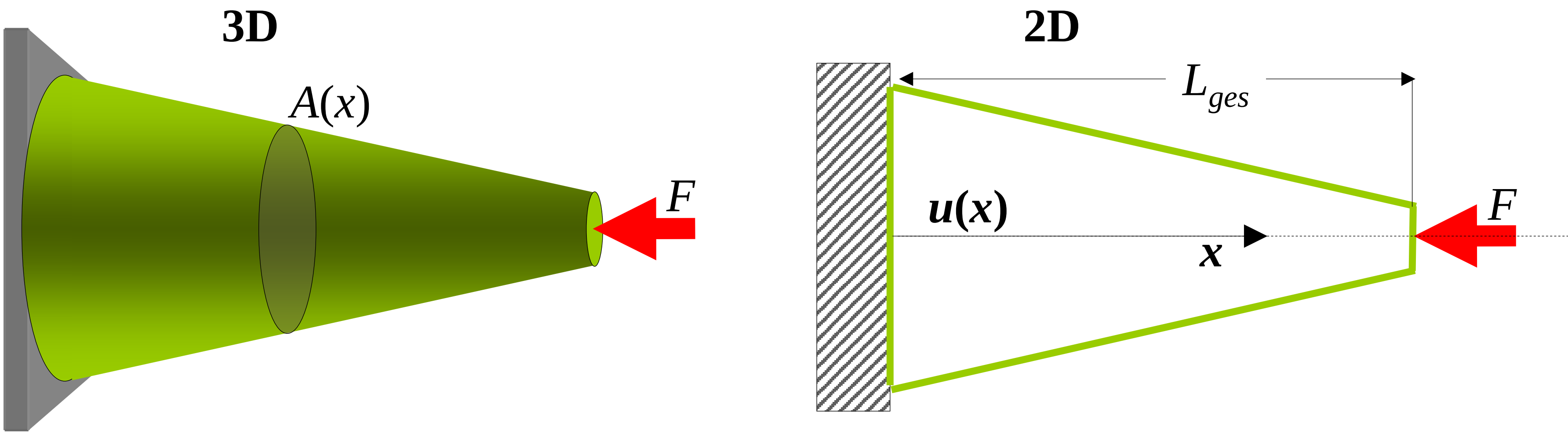


CAD-Modell mit Berechnungsgitter



FEM Ergebnis der Auslenkung

… der Frontflügel ist leider etwas zu kompliziert.
Als einfaches Einstiegsproblem betrachten wir die
Verformung eines Kegelstumpfes (Pylon) unter axialer Druckbelastung:



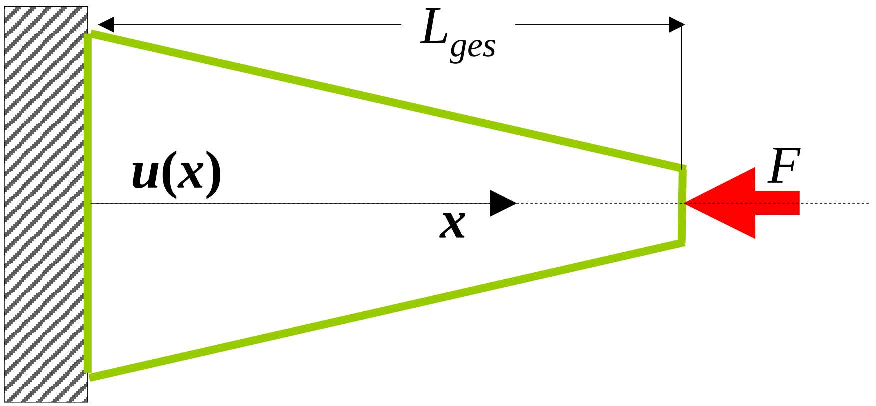
Augrund der Rotationssymmetrie betrachten wir zunächst lediglich eine zweidimensionale Schnittgeometrie. Gesucht ist die Verschiebungsfunktion u, die für jede Position die Auslenkung aus der Ruhelage angibt. Da die Kraft axial wirkt, hängt die gesuchte Verschiebung nur von der axialen Position ab: $u=u(x)$.

FEM → Modellproblem & Differentialgleichung

Die Differentialgleichung für die Verschiebungsfunktion lautet:

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{F}{A(x) \cdot E}$$

(Auf die Herleitung gehen wir hier nicht ein.)



Bedeutung der einzelnen Größen:

$u(x)$ – Auslenkung (Verschiebung) aus der Ruhelage. Wir legen fest, dass eine Verschiebung nach links durch positive Werte beschrieben wird.

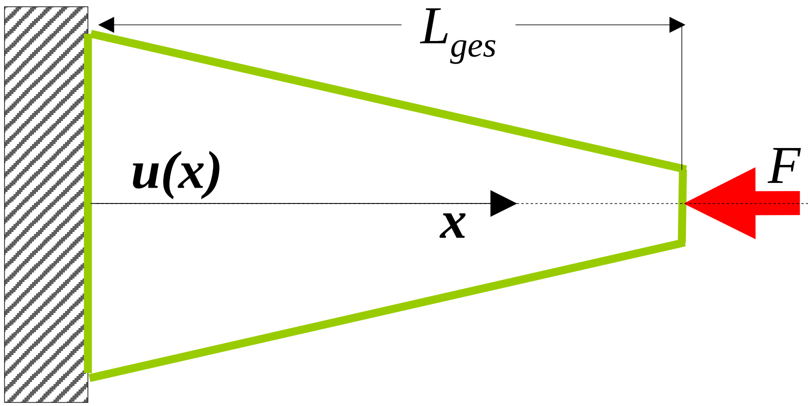
F – Betrag der Kraft, die in axialer Richtung wirkt.

E – Elastizitätsmodul (Young-Modul)

$A(x)$ – Querschnittsfläche

FEM → Modellproblem & analytische Lösung

Dieses Modellproblem ist hinreichend einfach gewählt, so dass hier die analytische Lösung direkt angegeben werden kann:



$$u(x) = \int_0^x \frac{F}{A(x')\cdot E}\,dx'$$

Für die Parameter:

$F = 20\ kN$

$E = 3000\ kN/cm^2$

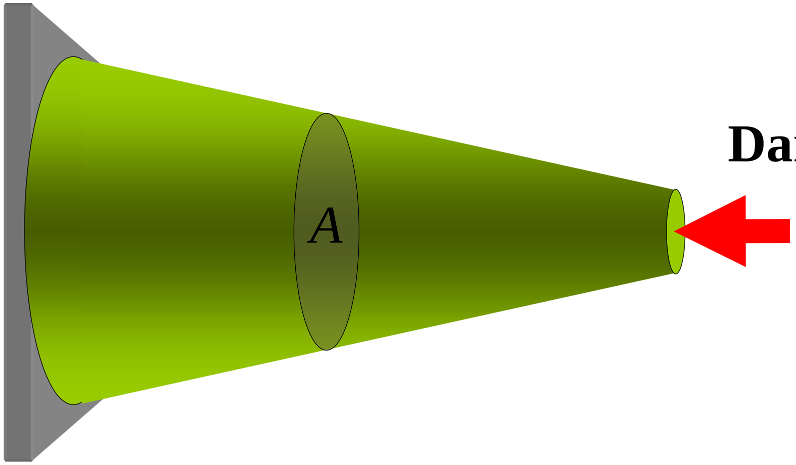
$L_{ges} = 100\ cm$

$A(x) = (10 - 0.09\ x)\ cm^2$

(diese möglichst einfach gewählte Flächenfunktion entspricht nicht den geraden Brandungen in den Skizzen)

ergibt sich: $u(x) = \frac{20}{3000}\cdot\frac{-1}{0.09}\cdot\left[ln(10-0.09\cdot x)-ln(10)\right]$

... wenn keine analytische Lösung existiert?



Dann wählt man einen numerischen Zugang:

Methode der Finiten Elemente (FEM)

(es gibt auch Alternativen:

z.B. die Methode der Finite Volumen

oder Finite Differenzen…)

Um die FEM-Idee zu verstehen, betrachten wir im Folgenden Dgl.en der Form $f\,(u'(x), u(x)) = 0$.

Wir schreiben die Modell-Dgl. in impliziter Form und erhalten

damit die gesuchte Form: $u'(x) - \dfrac{F}{A(x) \cdot E} = 0$

Problemstellung
Gesucht ist eine Fkt. $u(x)$, welche die lineare Dgl $f\left(u'(x),x\right)=0$ erfüllt.

Die **FEM** bietet ein Verfahren zu Berechnung einer genäherten Funktion (Approximation) $\tilde{u}(x)$, welche die Dgl ‚möglichst gut' erfüllt. Wird $\tilde{u}(x)$ in die Dgl eingesetzt, ist die rechte Seite i.a. nicht genau Null, das wäre ja für die exakte Lösung der Fall. Diese ist aber nicht bekannt. Für eine gute Approximation sollte die rechte Seite aber möglichst klein sein …und zwar überall:

Für alle $x \in [0, L_{ges}]$ soll gelten:

$$f\left(\tilde{u}'(x), x\right) = r, \quad \text{mit} \quad r \approx 0$$

Der Wert r auf der rechten Seite gibt an, welcher ‚Fehler' sich beim Einsetzen der Approximation in die Dgl für einen bestimmten x-Wert ergibt.

Als ein Maß für den Gesamtfehler betrachtet man die Größe

$$R = \int_0^{L_{ges}} \left(f\left(\tilde{u}'(x), x\right)\right)^2 dx,$$

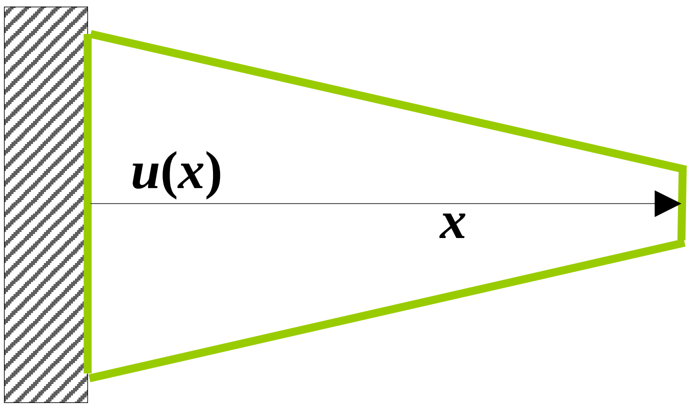
diese wird als Residuum (= ‚Rest') bezeichnet.
Im Residuum werden also die Fehlergrößen für alle x-Werte aufsummiert. Anstelle von $r = f\left(\tilde{u}'(x), x\right)$ wird jedoch über das Quadrat integriert, um ‚Vorzeicheneffekte los zu werden'. (Auch negative Fehler tragen zum Gesamtfehler bei.)

Die gesuchte Approximation $\tilde{u}(x)$ ist um so besser, je kleiner der damit verbundene Fehler ist, je kleiner also das entsprechende Residuum ist.

Aus der Minimalbedingung für das Residuum lässt sich die ‚optimale' Approximation bestimmen. Damit gelingt es uns die Lösung der gegebenen Dgl auf eine Extremwertsuche zurückzuführen.

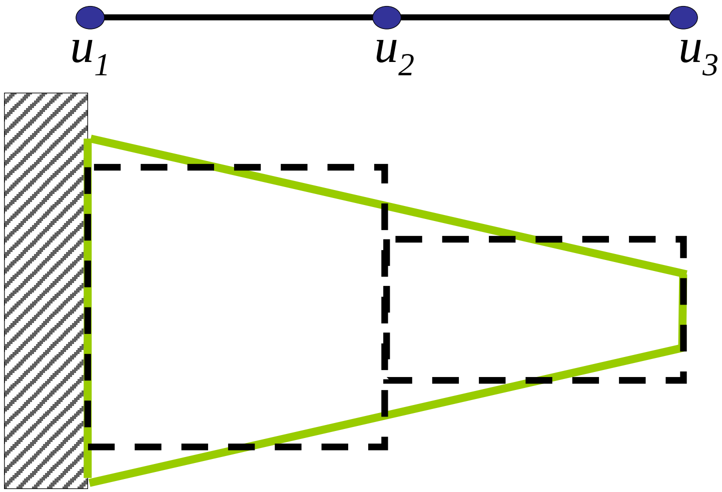
Weiter unten werden wir sehen, dass die Minimalbedingung für das Residuum auf ein lineares Gleichungssystem führt. Anstelle einer komplizierten Dgl ist also nur ein lineares Gleichungssystem zu lösen.

FEM → Diskretisierung



Nach der allgemeinen Strategie, wollen wir uns dem Typ von Näherungsfunktion zuwenden, mit dem die Verschiebungsfunktion beschrieben werden soll.

Dazu führen wir erst den Begriff der **Diskretisierung** ein. Darunter versteht man den Übergang von kontinuierlichen Variablen zu diskreten Werten.

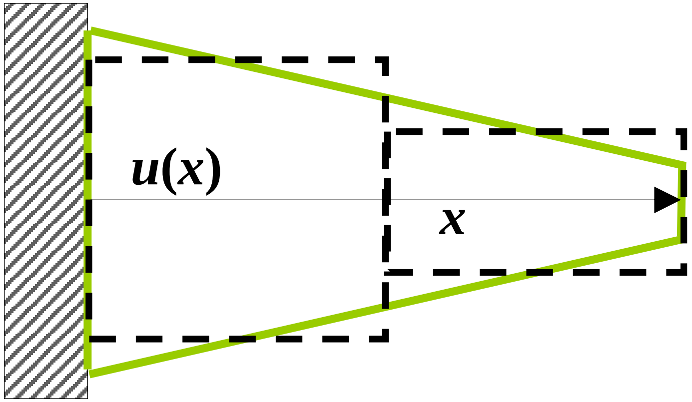


Im vorliegenden Fall bedeutet dies, dass wir $u(x)$ nicht für jeden x-Wert berechen, sondern die Verschiebung wird nur an bestimmten fest gewählten ‚Stützstellen' bestimmt. Im Weiteren wollen wir z.B. nur die Verschiebungen u_1, u_2 und u_3, ganz links, in der Mitte und am rechten Ende bestimmen.

Bezogen auf das physikalische Problem entspricht dies dem Übergang von der realen Geometrie zu einem Stapel zweier Zylinder. Die u_i beschreiben dann die Verschiebungen an den Enden, bzw. an der Kontaktfläche.

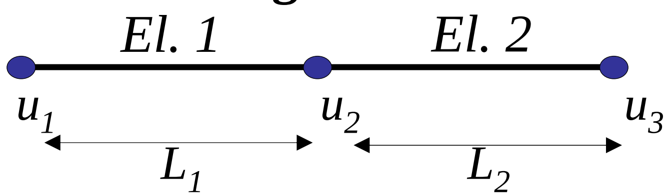
FEM → Diskretisierung

Der Übergang zum Zylinderstapel verdeutlicht eine wichtige FEM-Grundidee: die reale Geometrie wird durch mehrere einfache Geometrien approximiert.



Die Verschiebungen zwischen den Stützstellen können im einfachsten Fall linear interpoliert werden, d.h. man nimmt eine lineare Zu- oder Abnehme der Verschiebung zwischen den Stützstellen an.

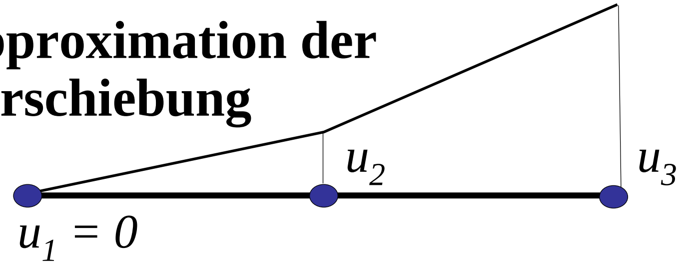
Diskretisierung



Jeder der durch die Diskretisierung erzeugten Bereiche wird ‚Element' genannt – daher der Name der Methode.

Innerhalb jedes Elements wird die Verschiebung mit einer ‚Ansatzfunktion' beschrieben, die – wie oben gesagt – hier im einfachsten Fall als linear angenommen wird. Die Ansatzfunktion bezeichnen wir mit $\tilde{u}_i(x)$.

Approximation der Verschiebung



Lineare Ansatzfunktion

Betrachten wir z.B. das erste Element. Allgemeiner linearer Ansatz: $\tilde{u}_1(x) = a \cdot x + b$

Es ist aber zweckmäßig, *a*, *b* durch die ‚Knotenverschiebungen' u_1, u_2 auszudrücken:

Es gilt: $\tilde{u}_1(0) = u_1 = b,$

$$\tilde{u}_1(x = L_1) = u_2 = a \cdot L_1 + b \Rightarrow a = \tfrac{u_2 - u_1}{L_1}$$

und damit: $\tilde{u}_1(x) = \dfrac{u_2 - u_1}{L_1} \cdot x + u_1$

In etwas eleganterer Vektorschreibweise

lässt sich die Ansatzfunktion darstellen als: $\tilde{u}_1(x) = u_1 \cdot \left(1 - \dfrac{x}{L_1}\right) + u_2 \cdot \left(\dfrac{x}{L_1}\right),$

führt man $N_1(x) = \left(1 - \dfrac{x}{L_1}\right), \qquad N_2(x) = \left(\dfrac{x}{L_1}\right)$

als Element-Basisfunktionen ein, so gilt: $\tilde{u}_1(x) = \begin{pmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$

FEM → Ansatzfunktion

Die Element-Basisfunktionen (auch Formfaktoren genannt) sind üblicherweise für alle Elemente bzw. für bestimmte Elementtypen gleich. Die vektorielle Schreibweise ist praktisch, hier aber nicht unbedingt notewendig, weswegen wir im Folgenden nicht näher darauf eingehen.

Die lineare Ansatzfunktion für das zweite Element lautet entsprechend: $\tilde{u}_2(x) = \frac{u_3 - u_2}{L_2} \cdot \left(x - L_1\right) + u_2$.

Insgesamt gilt also: $$\tilde{u}(x) = \begin{cases} \tilde{u}_1(x) = \frac{u_2 - u_1}{L_1} \cdot x + u_1 & x \in \left[0, L_1\right[\\ \tilde{u}_2(x) = \frac{u_3 - u_2}{L_2} \cdot \left(x - L_1\right) + u_2 & x \in \left[L_1, L_2\right] \end{cases}$$

FEM → Minimierung des Residuums

Zurück zur Strategie: Minimierung des Residuums (Fehlers) $R = \int_0^{L_{ges}} \left(f\left(\tilde{u}'(x), x\right)\right)^2 dx$

Für den konkreten Fall gilt: $$R = \int_0^{L_{ges}} \left\{ \tilde{u}'(x) - \frac{F}{A(x) \cdot E} \right\}^2 dx$$

$$R = \int_0^{L_1} \left\{ \frac{u_2 - u_1}{L_1} - \frac{F}{A(x) \cdot E} \right\}^2 dx + \int_{L_1}^{L_1+L_2} \left\{ \frac{u_3 - u_2}{L_2} - \frac{F}{A(x) \cdot E} \right\}^2 dx$$

Das Residuum hängt also von den drei unbekannten Verschiebungen ab.

Um das zu verdeutlichen schreiben wir: $R = R(u_1, u_2, u_3)$

Die gesuchten Knotenverschiebungen u_1, u_2 und u_3 ergeben sich dann aus den Minimierungsbedingungen:

$$R_{u_1} = \frac{\partial}{\partial u_1} R = 0, \qquad R_{u_2} = \frac{\partial}{\partial u_2} R = 0, \qquad R_{u_3} = \frac{\partial}{\partial u_3} R = 0$$

Wir betrachten genauer die erste Bedingung $R_{u_1} = \frac{\partial}{\partial u_1} R(u_1, u_2, u_3) = 0$:

$R(u_1, u_2, u_3)$ setzt sich aus zwei Integralen zusammen, von denen eins nicht von u_1 abhängt. Außerdem darf hier die Reihenfolge von Integration und partielle Ableitung vertauscht werden. Damit gilt:

$$R_{u_1} = \int_0^{L_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \left\{ \frac{u_2 - u_1}{L_1} - \frac{F}{A(x) \cdot E} \right\}^2 dx + 0 = \int_0^{L_1} 2 \left\{ \frac{u_2 - u_1}{L_1} - \frac{F}{A(x) \cdot E} \right\} \cdot \left(\frac{-1}{L_1} \right) dx$$

$$= \int_0^{L_1} 2 \left\{ \frac{u_2 - u_1}{L_1} - \frac{F}{A(x) \cdot E} \right\} \cdot \left(\frac{-1}{L_1} \right) dx \quad \text{...das erste Integral bringt einen Faktor } L_1\text{:}$$

$$= \frac{-2}{L_1} \cdot (u_2 - u_1) + \frac{2}{L_1} \frac{F}{E} \int_0^{L_1} \frac{1}{A(x)} dx$$

Es gilt also $R_{u_1} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{-2}{L_1} \cdot (u_2 - u_1) + \frac{2}{L_1} \frac{F}{E} \int_0^{L_1} \frac{1}{A(x)} dx = 0 \;\Leftrightarrow\; u_1 - u_2 + \frac{F}{E} \int_0^{L_1} \frac{1}{A(x)} dx = 0$

Das Vorgehen für die weiteren Bedingungen $R_{u_2} = 0$ und $R_{u_3} = 0$ ist vollkommen analog.

FEM → Minimierung des Residuums

Letztendlich findet man, dass jede (notwendige) Minimalbedingung auf eine einfache lineare Gleichung führt. Die Bedingungen zusammen führen auf ein lineares 3 x 3 Gleichungssystem für die gesuchten Verschiebungen:

$$\frac{\partial R}{\partial u_1} = 0 \Leftrightarrow u_1 - u_2 + \frac{F}{E}\int_0^{L_1} \frac{dx}{A(x)} = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial u_2} = 0 \Leftrightarrow u_2 - u_1 - \frac{F}{E}\int_0^{L_1} \frac{dx}{A(x)} + u_2 - u_3 + \frac{F}{E}\int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{dx}{A(x)}$$

$$\frac{\partial R}{\partial u_3} = 0 \Leftrightarrow u_3 - u_2 - \frac{F}{E}\int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{dx}{A(x)} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_1 \\ b_1 - b_3 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$b_1 = \frac{F}{E}\int_0^{L_1} \frac{dx}{A(x)}$$

$$b_3 = \frac{F}{E}\int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{dx}{A(x)}$$

… damit sind wir fast am Ziel. Leider hat das gefundene Gleichungssystem keine eindeutige Lösung. Das liegt daran, dass wir die Randbedingung des Kegels an der linken Seite noch nicht eingebaut haben. Da der Kegel links fest aufliegt, muss hier die Verschiebung verschwinden, es muss also gelten u_1=0.

FEM → Minimierung des Residuums

Wir ersetzen die erste Gleichung durch die Randbedingung u_1=0 und erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 - b_3 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Die Terme der rechten Seite:

$$b_1 = \frac{F}{E} \int_0^{L_1} \frac{dx}{A(x)} \quad b_3 = \frac{F}{E} \int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{dx}{A(x)},$$

können vorab berechnet werden.

Im vorliegenden Fall: $F = 20\ kN$

$E = 3000\ kN/cm^2$

$L_{ges} = 100\ cm$

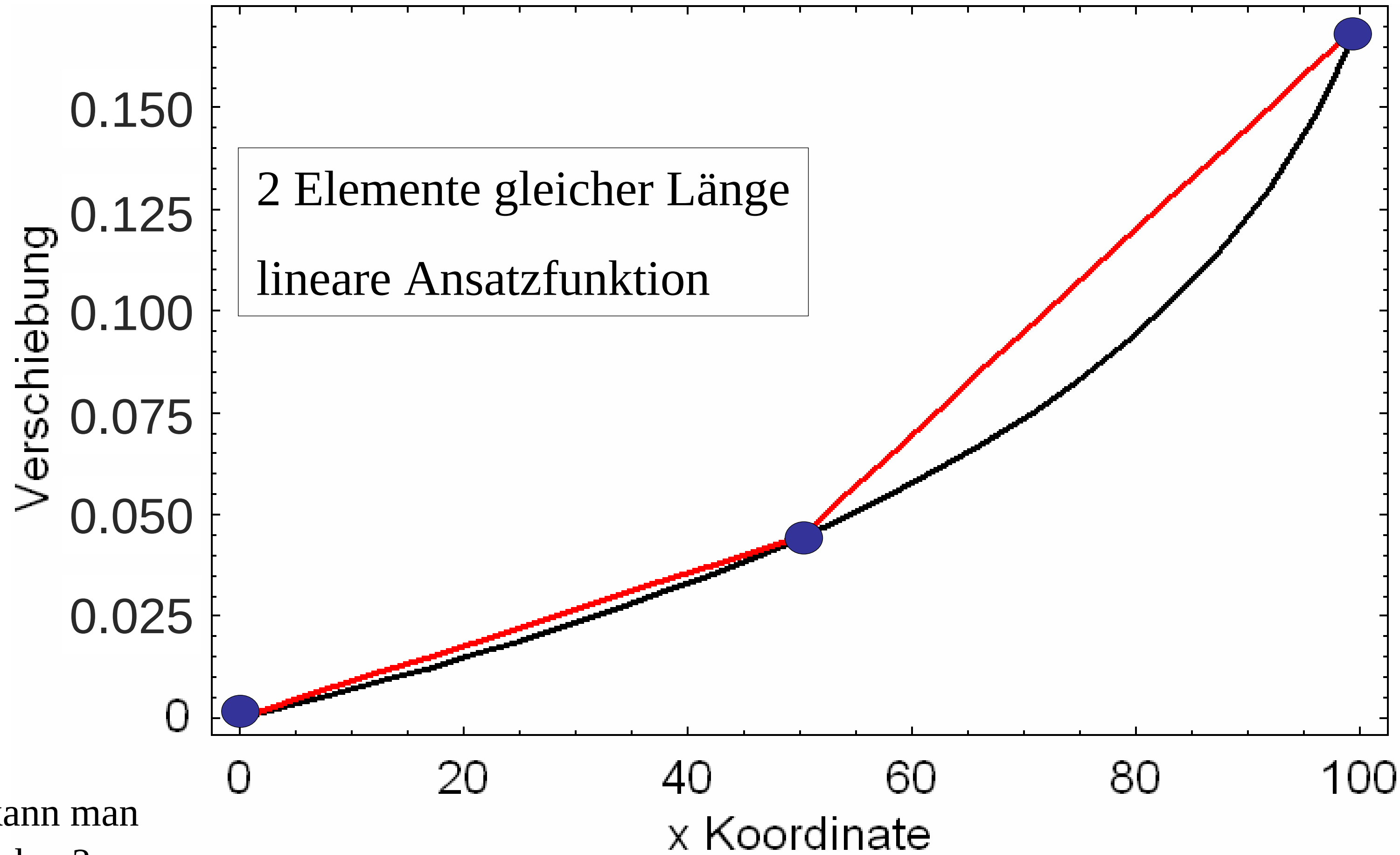
$A(x) = (10 - 0.09\ x)\ cm^2$

lautet die Lösung des Gleichungssystems dann: $u_1 = 0$

$u_2 = 0.044$

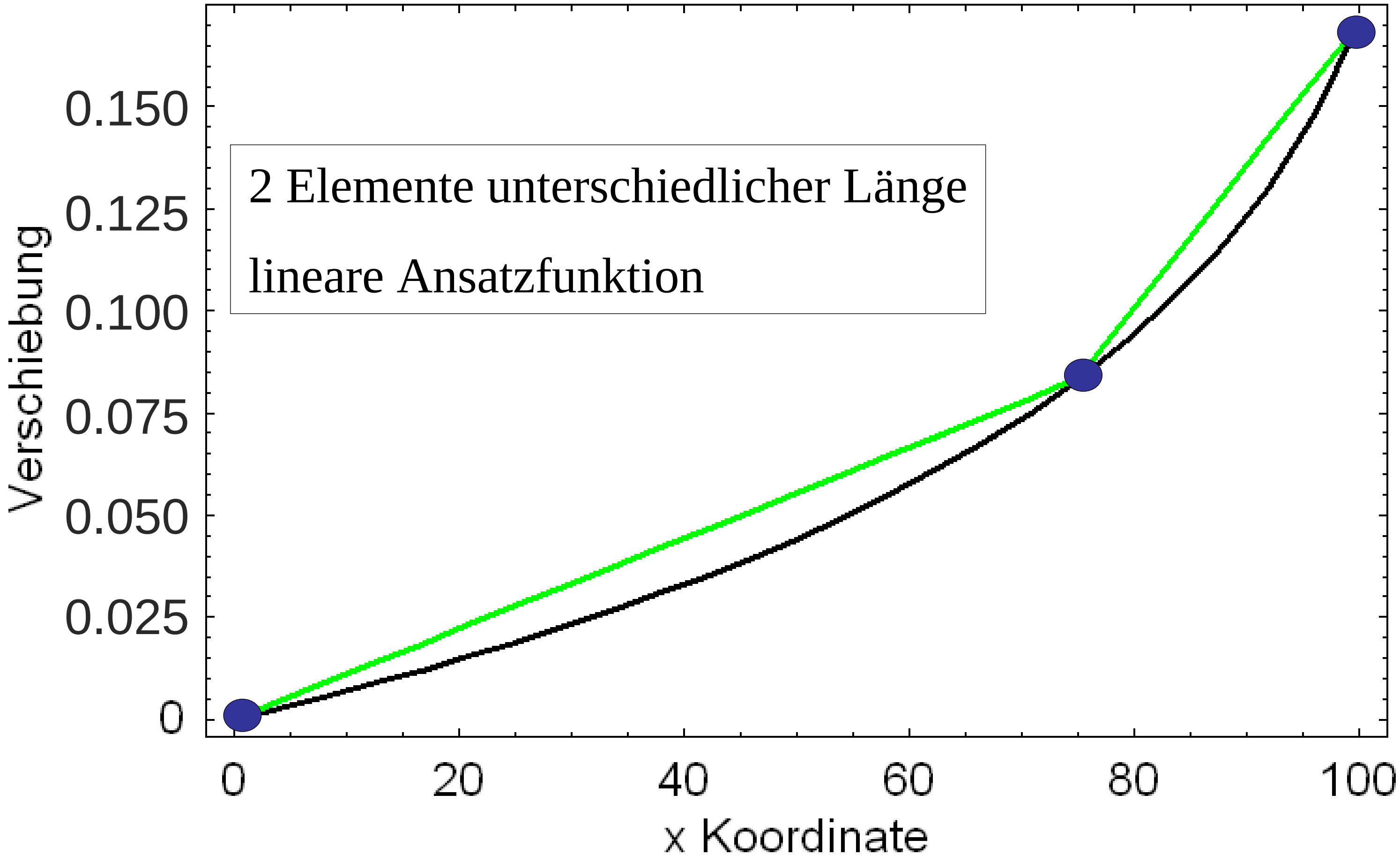
$u_3 = 0.17$

Ergebnisvergleich: Die blauen Punkte zeigen die FEM-Ergebnisse an den drei Stützstellen, in rot sind die linearen Interpolationen gezeigt. Die schwarze Kurve zeigt das exakte Ergebnis.

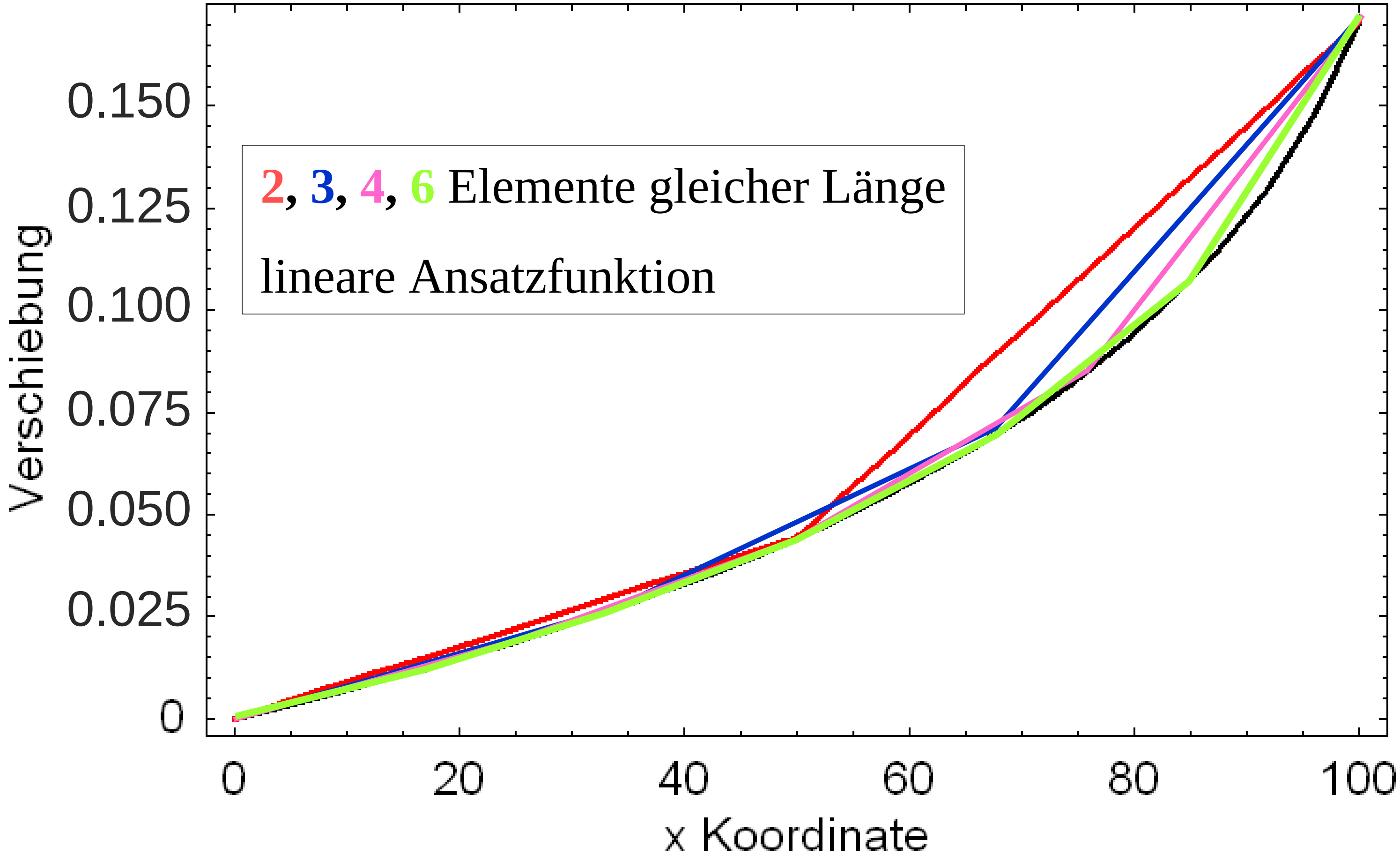


Frage: Was kann man noch besser machen?

Ergebnisvergleich: FEM mit ‚adaptiver' Diskretisierung. Generell ist es von Vorteil, dass in Regionen, in denen sich die gesuchte Größe stark ändert, kleinere Elemente verwendet werden.



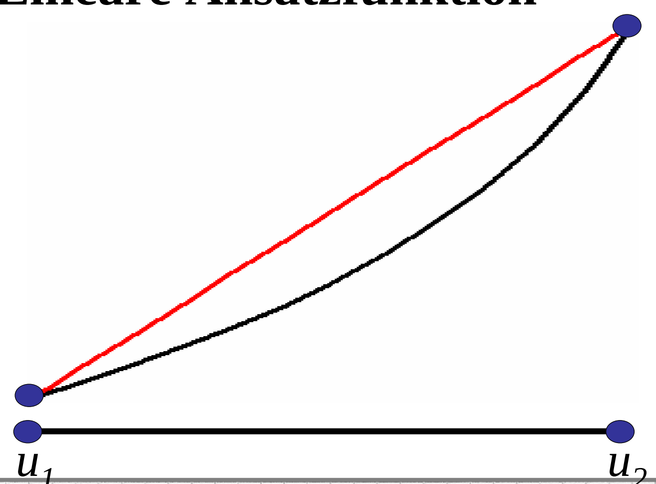
Ergebnisvergleich: FEM Ergebnis mit ‚feinerer' Diskretisierung'. Auch durch die Verwendung mehrerer kleinerer Elemente können Änderungen in der gesuchten Größe genauer beschrieben werden.



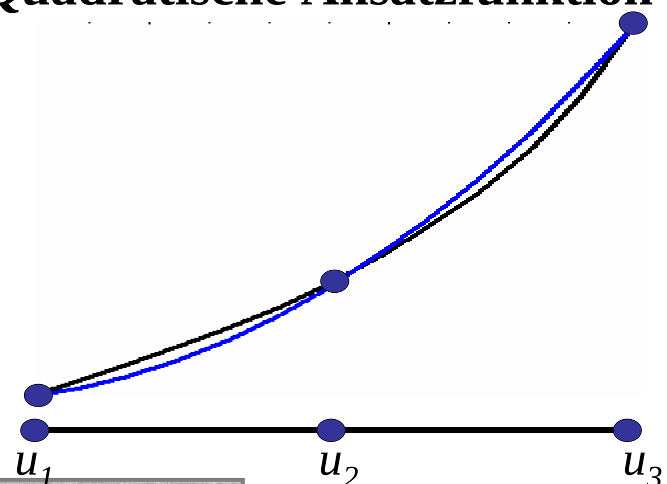
Anhand des Vergleichs der bisherigen FEM-Ergebnisse mit der exakten Lösung sieht man, dass die Güte der Näherung durch die Verwendung möglichst kleiner Elemente verbessert wird.

Anstelle der Anzahl kann man aber auch die Art der Elemente optimieren. Bisher wurde eine lineare Ansatzfunktion für die Elemente gewählt, d.h. die Verschiebung innerhalb eines Elements wurde linear interpoliert – also durch eine Gerade dargestellt. Man kann stattdessen auch z.B. ein Polynom 2. Ordnung – also eine Parabel verwenden. Dazu muss innerhalb jedes Elements eine weitere Stützstelle berechnet werden, da eine Parabel nur durch drei Punkte eindeutig bestimmt ist.

Lineare Ansatzfunktion



Quadratische Ansatzfunktion



Lineare Ansatzfunktion (Wdh.)

Element:

Ansatzfunktion: $\tilde{u}_1(x) = a \cdot x + b$

a und b werden durch Knotenverschiebungen ausgedrückt: $a, b \rightarrow u_1, u_2$

$$\tilde{u}_1(x) = \frac{u_2 - u_1}{L} \cdot x + u_1$$

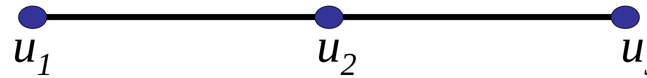
oder in vektorieller Schreibweise:

$$\tilde{u}_1(x) = \begin{pmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

mit

$$N_1(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right), \qquad N_2(x) = \left(\frac{x}{L}\right)$$

Quadratische Ansatzfunktion



$$\tilde{u}_1(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

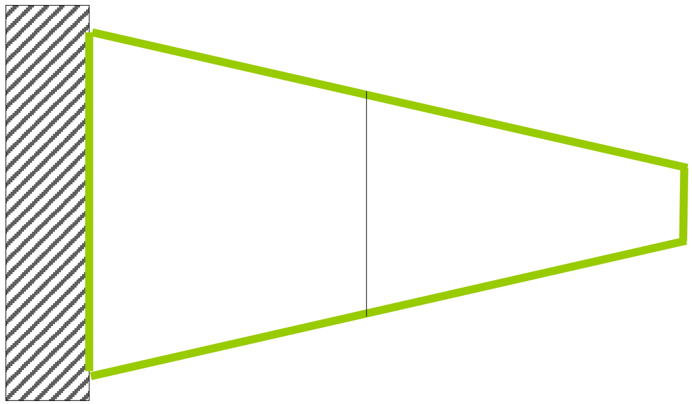
Auch hier werden die Koeffizienten a, b, c durch die Knotenverschiebungen ausgedrückt. Ergebnis (ohne Herleitung) in vektorieller Schreibweise:

$$\tilde{u}_1(x) = \begin{pmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \\ N_3(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit}$$

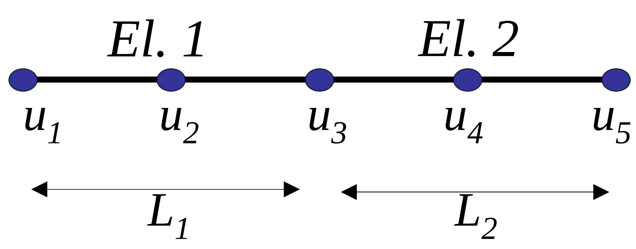
$$N_1(x) = 1 - 3 \cdot \frac{x}{L} + 2 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2$$

$$N_2(x) = 4 \cdot \frac{x}{L} \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right), \quad N_3(x) = -\frac{x}{L} + 2 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2$$

Wirkliche Struktur



Diskretisierung



Näherung im gesamten Rechengebiet:

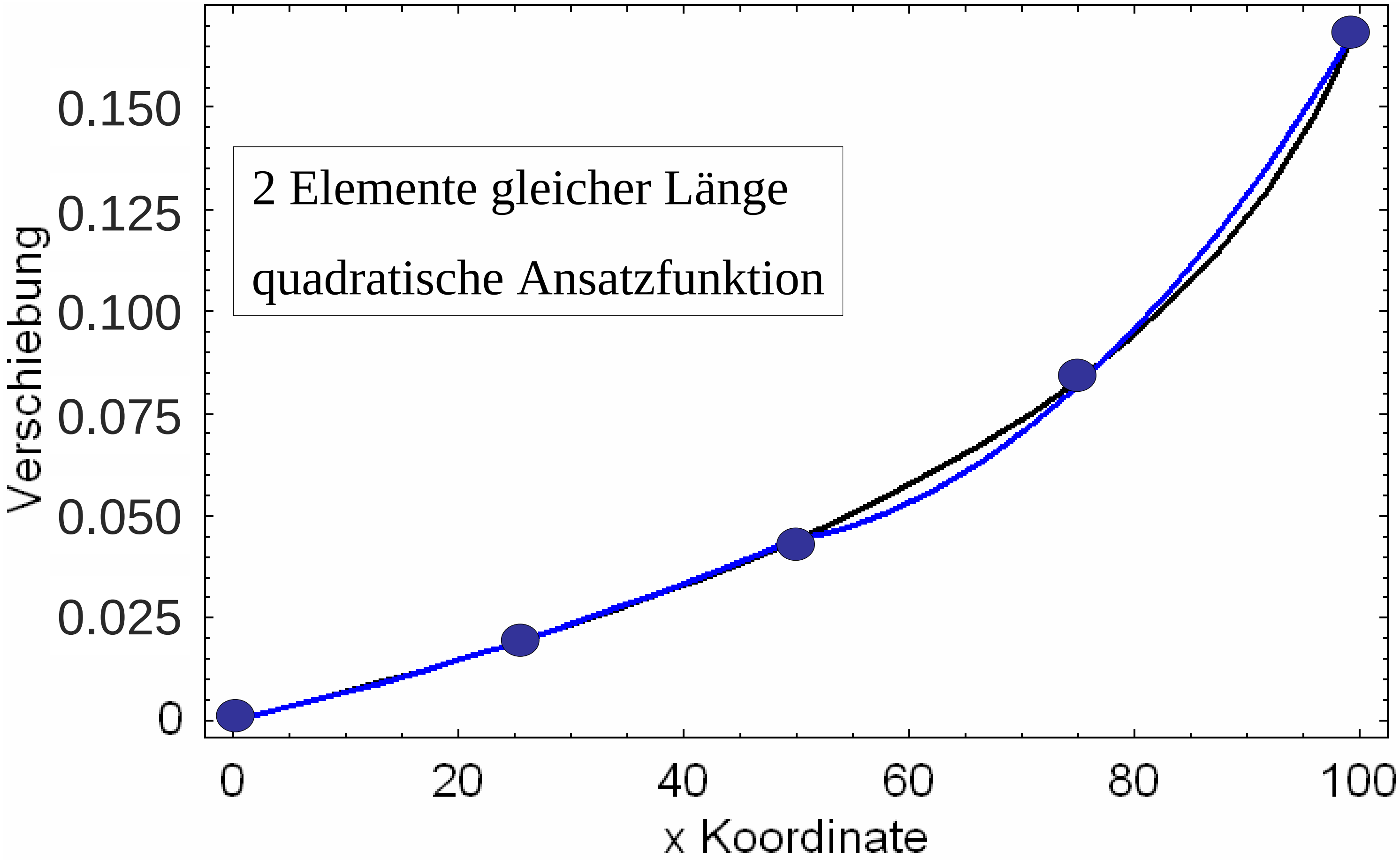
$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} \tilde{u}_1(x) = \begin{pmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \\ N_3(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} & x \in [0, L_1[\\ \tilde{u}_2(x) = \begin{pmatrix} N_1(\hat{x}) \\ N_2(\hat{x}) \\ N_3(\hat{x}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} & \hat{x} \in [0, L_2] \\ & \hat{x} = x - L_1 \end{cases}$$

Residuum: $R = \int_0^{L_{ges}} \left\{ \tilde{u}'(x) - \frac{F}{A(x) \cdot E} \right\}^2 dx$

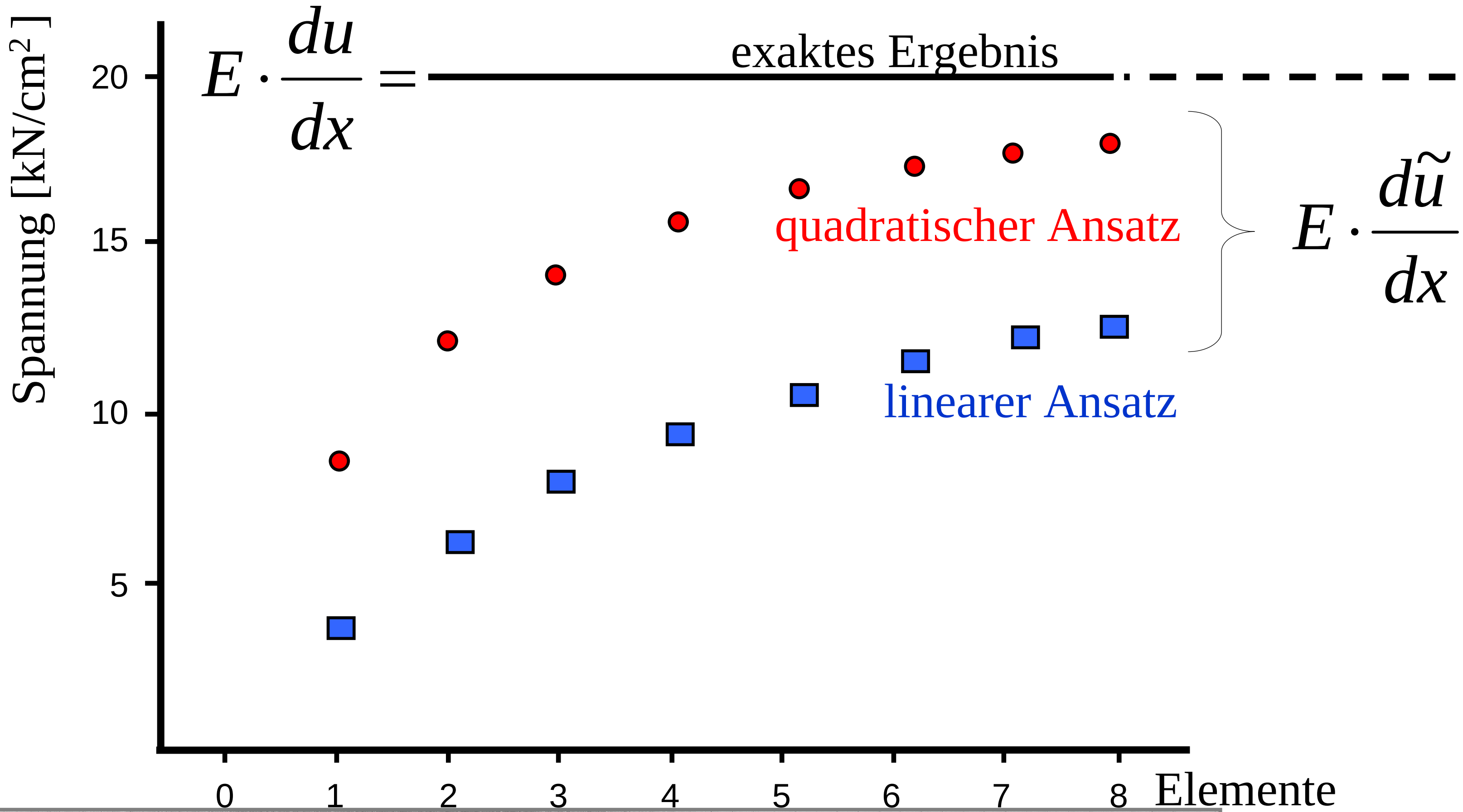
Gesucht sind jetzt fünf Knotenverschiebungen. Analog zum linearen Fall ergeben sich diese aus den Minimalbedingungen:

$$R_{u1} = 0, \quad \cdots \quad R_{u5} = 0$$

Ergebnisvergleich: Die blauen Punkte zeigen die FEM-Ergebnisse an den Stützstellen. Die blauen Linien zeigen die quadratische Interpolation. Die schwarze Kurve zeigt das exakte Ergebnis.



Konvergenzverhalten: Um die Qualität der FEM-Näherung zu beurteilen, betrachten wir die Spannung an der Kegelspitze. Während im gewählten FEM-Beispiel die Auslenkung selbst sehr gut wiedergegeben wird, ist das für die Spannung nicht der Fall:



Konvergenzverhalten:

Mit zunehmender Elementanzahl nähert sich das FEM-Ergenbis dem exakt berechneten Wert, sowohl für lineare als auch quadratische Ansatzfunktionen. Im linearen Fall geschieht dies jedoch sehr langsam, so dass sehr viele Elemente benötigt würden um eine akzeptable Genauigkeit zu erreichen. Mit quadratischen Ansatzfunktionen funktioniert das besser, so dass diese im vorliegenden Fall, trotz des höheren Rechenaufwands, zu bevorzugen sind.

Das gesamte Vorgehen ist auf der folgenden Folie noch einmal kurz zusammengefasst.

FEM → Zusammenfassung

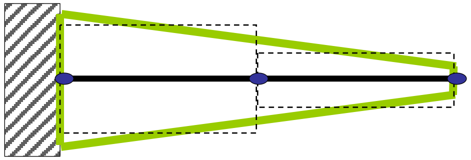
- Gegeben ist eine **Differentialgleichung** (mit entsprechenden Randbedingungen)
  Gesucht ist eine möglichst gute **Näherungslösung**

$$f\left(u''(x), u'(x), x\right) = 0$$

hier: $u'(x) - \frac{F}{A(x)\cdot E} = 0$

hier: $\tilde{u}(x)$

- **Aufteilung des Rechengebiets** in ‚Elemente' (Diskretisierung) →



- Wahl der **Ansatzfunktion**, für jedes Elemnt, z.B. linear →

$$\tilde{u}_1(x) = \frac{u_2 - u_1}{L_1} \cdot x + u_1$$

- Die **Näherungslösung** erfüllt die Dgl. i.a. nicht exakt, sonder nur ‚ungefähr'. →

$$f\left(\tilde{u}'(x), x\right) = r \approx 0$$

- Der Gesamtfehler (Residuum) ist →

$$R = \int_0^{L_{ges}} \left(f\left(\tilde{u}'(x), x\right)\right)^2 dx$$

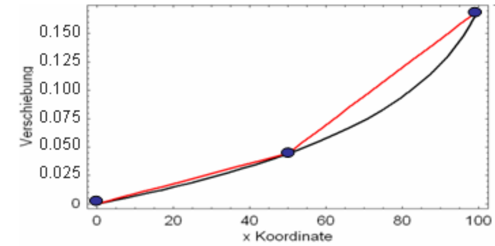
- Aus der **Fehlerminimierung** folgt ein **Lineares Gleichungssystem,** →

$$R_{u_1} = 0,\;\; R_{u_2} = 0,\;\; R_{u_3} = 0$$

$$\Downarrow$$

- dessen **Lösung ergibt die Auslenkungen an den Knotenpunkten** →

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \vec{u} = \vec{b} \;\Rightarrow$$



FEM → Ein paar Anmerkungen zum Schluss

- Der hier skizzierte Zugang zu FEM ist nur einer von mehreren möglichen. Einige Schlüsselbegriffe für weitere Recherchen sind: Energiefunktional, Ritz-Verfahren, Garlekin-Methode, …

- Viele weitere Aspekte bzgl.:

  Implementation, Speicherbedarf, Rechenaufwand, Konvergenzverhalten, freie und kommerzielle FEM Software, …

  können hier in der Kürze nicht besprochen werden. Auch diesbzgl. wird auf die weiterführende Literatur verwiesen.

- Im Rahmen des FEM-Zugangs wird eine Dgl auf ein lineares Gleichungssystem abgebildet. Der Lösungsvektor enthält die gesuchten Funktionswerte (in unserem Beispiel die Verschiebungen) an den Knotenpunkten. In der Praxis kann der Lösungsvektor sehr viele Einträge haben. Anstelle der Dgl ist dann ein lineares System mit einigen Hunderttausend bis einigen Millionen Gleichungen und ebenso vielen Unbekannten zu lösen. Mit den richtigen Solver-Routinen lässt sich dies heutzutage auf leistungsstärkeren PCs oder Laptops bewerkstelligen.

FEM → Ein paar Anmerkungen zum Schluss

- Warum muss Sie das interessieren? … das rechnet doch sowieso alles der Computer!

  - Berechnungsergebnisse sind aber höchstens so gut wie die Handhabung des Programms, ‚leider' gilt immer noch: garbage in → garbage out

  - Alle diskutierten Punkte, wie Elementanzahl, Ansatzfunktion … und noch viele weitere) erfordern i.a. Spezifizierungen durch den Bediener.

  - Man muss wissen, was und wie das Programm rechnet, um auf Probleme reagieren zu können.

- FEM kann noch viel mehr. Die Einsatzmöglichkeiten der Methode gehen über das einfache diskutierte Beispiel und über Strukturmechanik allgemein weit hinaus. Weitere Einsatzgebiete sind:

  - Fluiddynamik: Navier-Stokes Gleichungen, Mehrphasenströmungen,

  - Stoff- & Wärmetransport: Konvektions-Diffusions-Gleichungen

  - Elektrodynamik: Maxwell-Gleichungen

  … allgemeine partielle Differentialgleichungen.