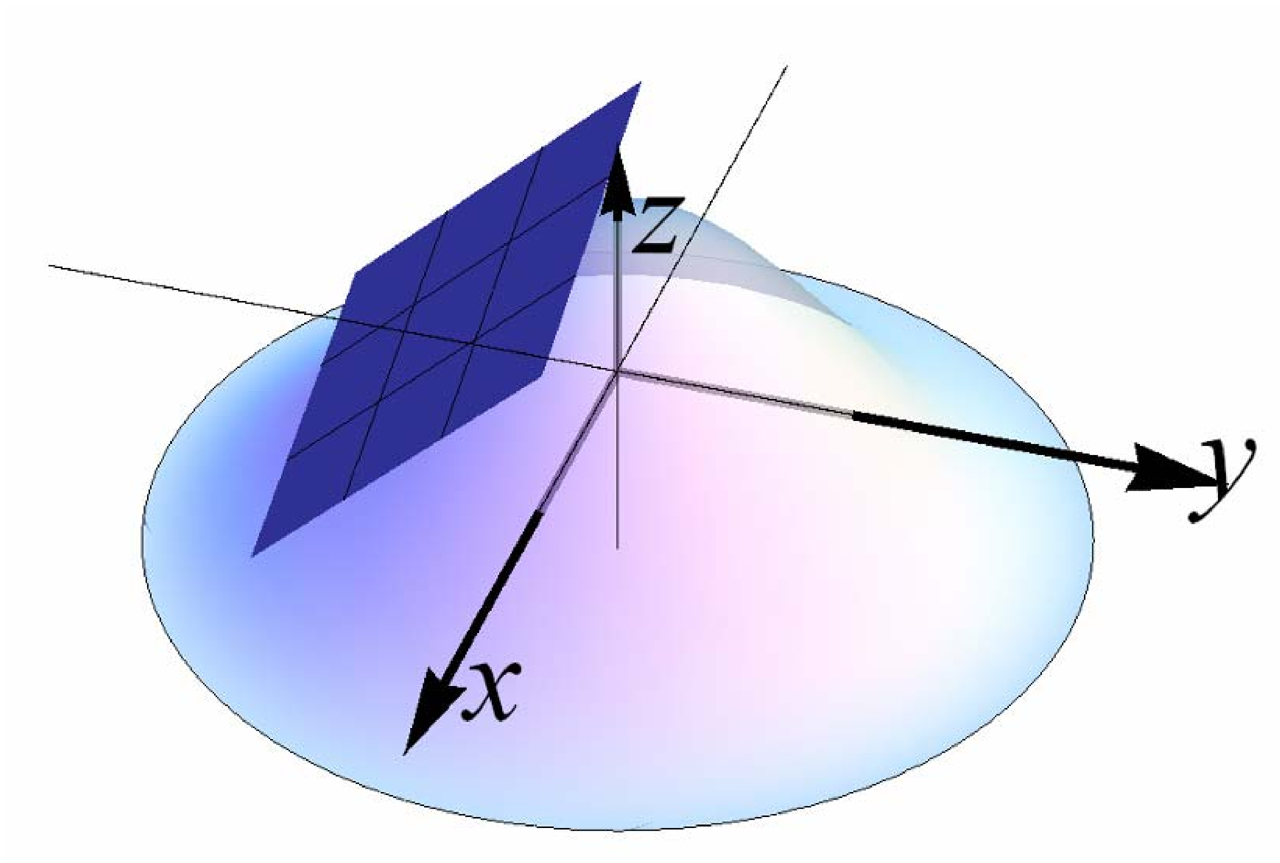
Partielle Ableitungen & Tangentialebenen



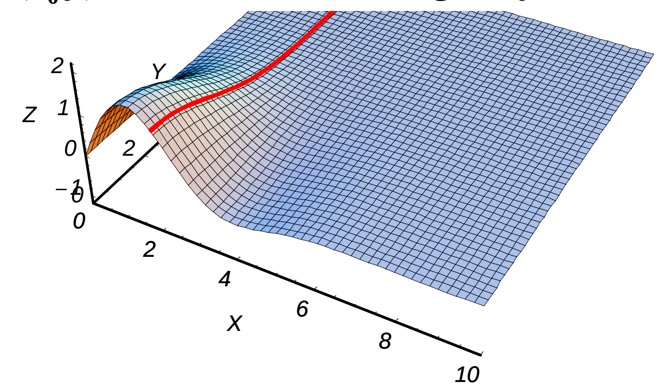
Bei Funktionen mit einer Variable, gibt die Ableitung $f\,'(x)$ die Steigung an.

Bei mehreren Variablen, $z(x,y)$, gibt es keine eindeutige Steigung.
Die Steigung ist richtungsabhängig!

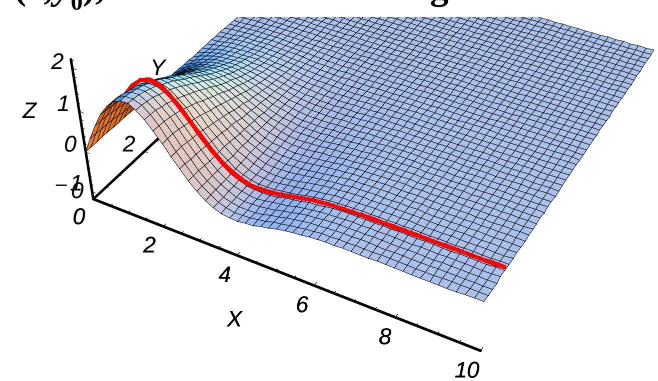
Ableitungen können aber in alt bekannter Weise berechnet werden, wenn Schnittkurven betrachtet werden.

Die Schnittkurven ergeben sich, wenn man eine der zwei Variablen konstant gehalten wird:
$x = x_0$ = konst. oder $y = y_0$ = konst.

$z(x_0,y)$, Schnittkurve entlang der y-Achse

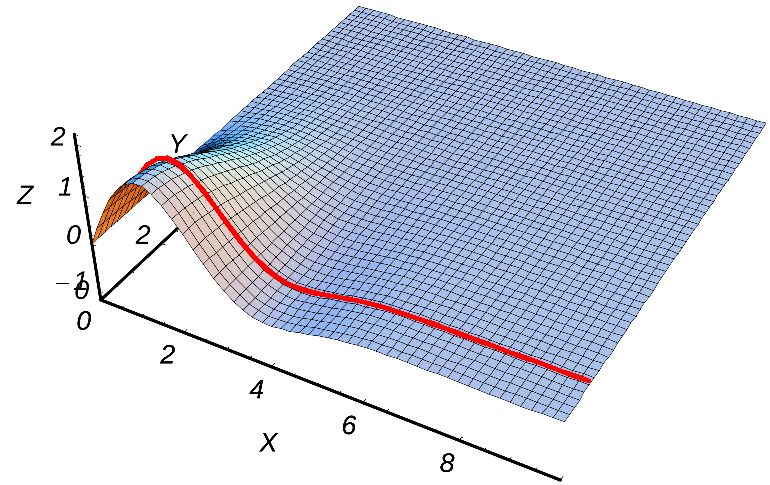


$z(x,y_0)$, Schnittkurve entlang der x-Achse



Die Schnittkurven: $z(x, y_0)$ und $z(x_0, y)$ werden wie gewohnt differenziert:

Ableitung = Grenzwert des Differenzenquotienten .

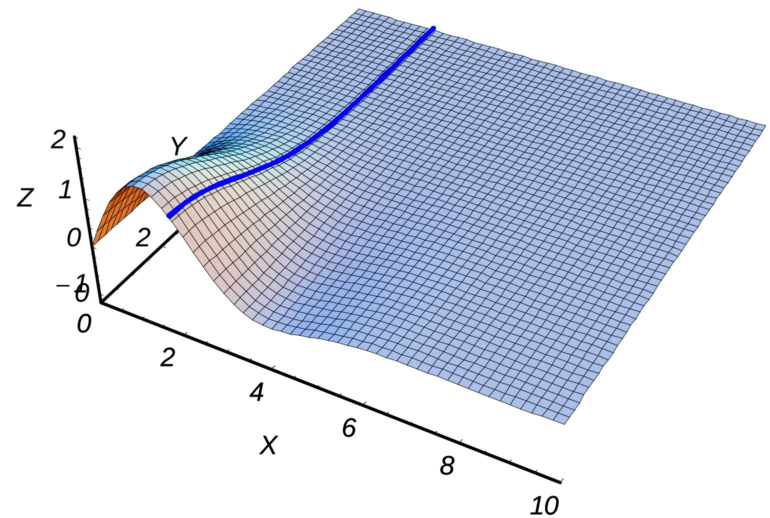


Da sich die Ableitungen der Schnittkurven jeweils auf nur eine Variable beziehen, werden Sie als partielle (= ‚teilweise') Ableitungen bezeichnet.

In x-Richtung ($y = y_0$ = konst.) erhält man

die **partielle Ableitung nach *x***

$$\lim_{h\to 0}\frac{z(x+h, y_0)-z(x, y_0)}{h}$$



In y-Richtung ($x = x_0$ = konst.) erhält man

die **partielle Ableitung nach *y***

$$\lim_{h\to 0}\frac{z(x_0, y+h)-z(x_0, y)}{h}$$

Partielle Ableitungen können nicht nur durch einen Strich kenntlich gemacht werden, wie im Fall einer Variablen, da die jeweilige ‚Ableitungsrichtung' auch angegeben werden muss.

Die **partielle Ableitung nach *x*** $= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{z(x+h, y_0) - z(x, y_0)}{h}$

wird mit $z_x(x, y)$, oder $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ bezeichnet.

Die **partielle Ableitung nach *y*** $= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{z(x_0, y+h) - z(x_0, y)}{h}$

wird mit $z_y(x, y)$, oder $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ bezeichnet.

Zusammenfassung: Partielle Differentiation erfolgt so, dass man die Funktion nach der gewünschten Variablen differenziert und die anderen Variablen als Konstanten betrachtet.

Bei der Ableitung nach x betrachtet man y als konstant:

„Alles was nicht x ist, ist (wie) eine Zahl“

Bei der Ableitung nach y betrachtet man x als konstant.

„Alles was nicht y ist, ist (wie) eine Zahl“

Beispiele:

$z(x,y) = 3x^2 + 2y^2 \quad \rightarrow \quad z_x(x,y) = 6x$ und $z_y(x,y) = 4y$

$z(x,y) = 3x^2 \cdot 2y^2 = 6x^2y^2 \quad \rightarrow \quad z_x(x,y) = 12xy^2$ und $z_y(x,y) = 12x^2y$

Hier muss (darf) <u>nicht</u> die Produktregel angewendet werden. Bei der part. Ableitung nach *x* ist *y* und somit auch y^2 konstant und bleibt (wie ein Zahlenfaktor) bei der Abl. erhalten.

$z(x,y) = x\cos(y) \quad \rightarrow \quad z_x(x,y) = \cos(y)$ und $z_y(x,y) = -x\sin(y)$

… auch hier keine Produktregel

$z(x,y) = x\cos(xy) \quad \rightarrow \quad z_x(x,y) = \cos(xy) - xy\sin(xy)$ und $z_y(x,y) = -x^2\sin(xy)$

Bei der part. Ableitung nach *x* werden Produkt- und Kettenregel angewendet - bei der part. Ableitung nach *y* nur die Produktregel.

Beispiele:

$z(x,\ y) = 3\,x + 7\,y - 2$ $\quad z_x(x,\ y) = 3$ $\quad z_y(x,\ y) = 7$

$z(x,\ y) = 3\,x^2 + 2\,y^3$ $\quad z_x(x,\ y) = 6\,x$ $\quad z_y(x,\ y) = 6\,y^2$

$z(x,\ y) = 3\,x^2 \cdot y^3$ $\quad z_x(x,\ y) = 6\,x \cdot y^3$ $\quad z_y(x,\ y) = 3\,x^2 \cdot 3\,y^2 = 9\,x^2\,y^2$

$z(x,\ y) = \frac{x}{y}$ $\quad z_x(x,\ y) = \frac{1}{y}$ $\quad z_y(x,\ y) = -\frac{x}{y^2}$

$z(x,\ y) = \left(\frac{x}{y}\right)^2$ $\quad z_x(x,\ y) = \frac{2\,x}{y^2}$ $\quad z_y(x,\ y) = -\frac{2\,x^2}{y^3}$

$z(x,\ y) = 2\sqrt{x} \cdot y^4$ $\quad z_x(x,\ y) = 2 \cdot \frac{1}{2}\,x^{-1/2} \cdot y^4 = \frac{y^4}{\sqrt{x}}$ $\quad z_y(x,\ y) = 8\sqrt{x} \cdot y^3$

$z(x,\ y) = x^3 \cos\left(x\sqrt{y}\right)$ $\quad z_x(x,\ y) = 3\,x^2 \cos\left(x\sqrt{y}\right) - x^3\sqrt{y}\,\sin\left(x\sqrt{y}\right)$

$$z_y(x,\ y) = -\frac{x^4 \sin\left(x\sqrt{y}\right)}{2\sqrt{y}}$$

$z(x,\ y) = \sqrt[3]{y}\,\ln\left(x^2\,y\right)$ $\quad z_x(x,\ y) = \frac{2\sqrt[3]{y}}{x}$

$$z_y(x,\ y) = \frac{\ln\left(x^2\,y\right)}{3\,y^{2/3}} + \frac{1}{y^{2/3}}$$

Linearisierung bedeutet eine Funktion in einer Umgebung einer Stelle x_0 durch eine Tangente zu ersetzten. Der Vorteil: die Tangente ist immer eine einfache Gerade, egal wie kompliziert die Ausgangsfunktion ist.

Tangentengleichung: $T(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \left(x - x_0\right)$

Wichtig: x_0 bezeichnet den Arbeitspunkt, dieser ist fest vorgegeben; x bezeichnet wie gewöhnlich die unabhängige Variable.

Ein ähnliches Vorgehen bietet sich auch bei mehreren Veränderlichen an!

Man ersetzt eine in der Nähe eines Arbeitspunktes (x_0, y_0) die Funktion $z(x, y)$ durch ihre **Tangentialebene** $T(x, y)$.

Die Gleichung der Tangentialebene ergibt sich analog zur Tangentengleichung, wobei jetzt die partiellen Ableitungen in x- und y-Richtung einzusetzen sind:

$$T(x, y) = z(x_0, y_0) + z_x(x_0, y_0) \cdot \left(x - x_0\right) + z_y(x_0, y_0) \cdot \left(y - y_0\right)$$

Differentiation v. Funktionen mit zwei Variablen → Tangentialebenen

Berechnungsbeispiel: Gesucht ist die Tangentialebene der Funktion $z(x,y) = yx^2 + y^2$ im Arbeitspunkt (1, 2).

$$T(x,y) = z(x_0,y_0) + z_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + z_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

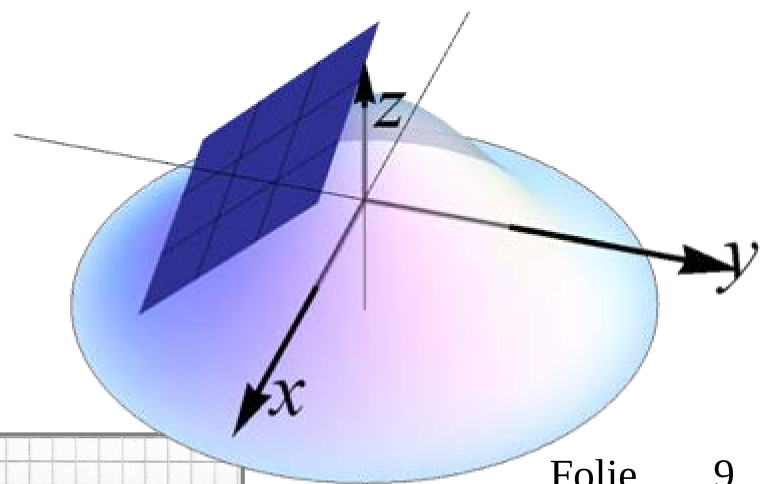
die part. Ableitungen sind:

$$z_x(x,y) = 2x\,y \xrightarrow{x_0=1,\ y_0=2} z_x(1,2) = 4$$

$$z_y(x,y) = x^2 + 2y \xrightarrow{x_0=1,\ y_0=2} z_y(1,2) = 5 \qquad z(1,2) = 6$$

$$T(x,y) = 6 + 4\cdot(x-1) + 5\cdot(y-2) = 4\,x + 5\,y - 8$$

Übung: Gesucht ist die Tangentialebene der Funktion $z(x,y) = 2\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ im Arbeitspunkt (0.5, -1).



Lsg.: $T(x,y) = -0.8043\,x + 1.6086\,y + 2.8857$

Übung: Gesucht ist die Tangentialebene der Funktion $z(x, y) = x^2 \cdot y^3$
im Arbeitspunkt (-1, 4)

Ergebnis: $T(x, y) = -128x + 48y - 256$