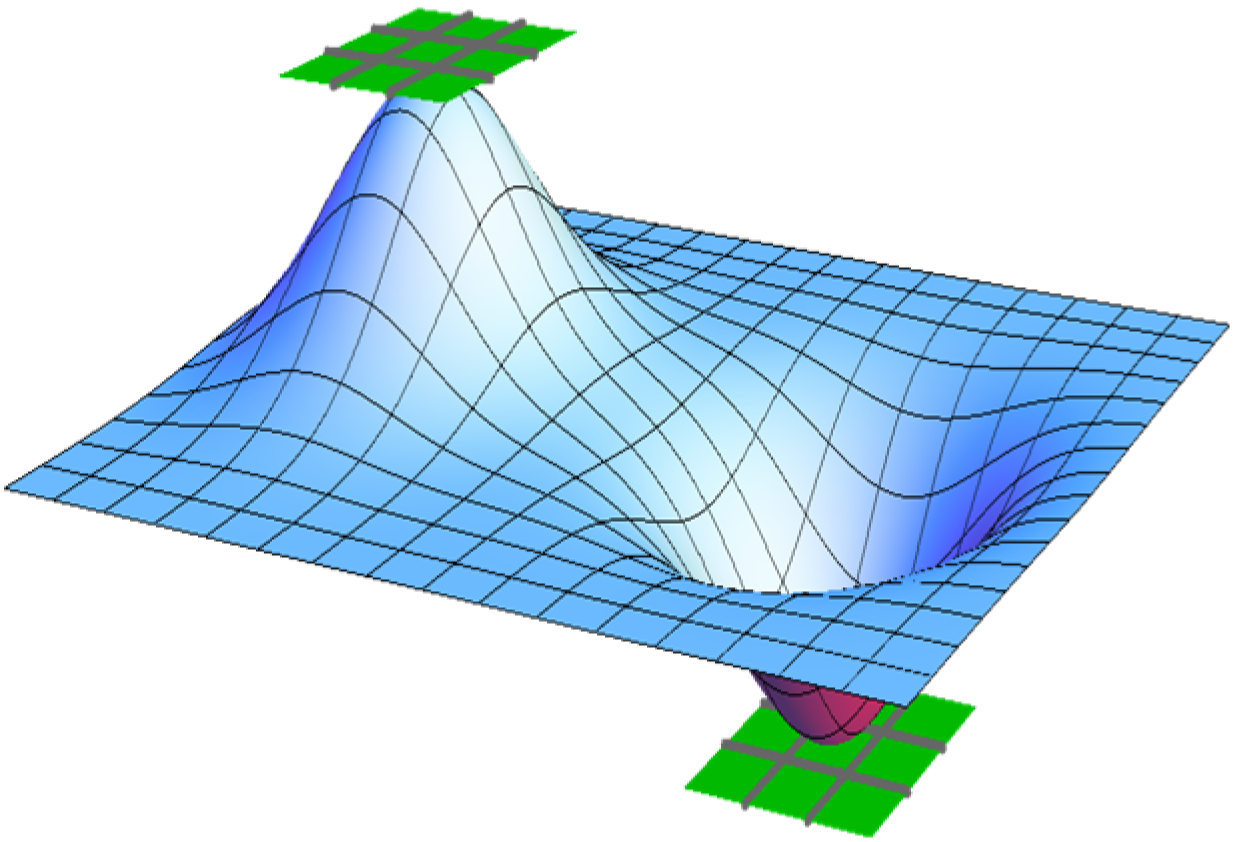
Fehlerfortpflanzung & Extremwertbestimmung



In vielen technischen Zusammenhängen sind die Werte bestimmter Größen nicht genau bekannt sondern mit einer Unsicherheit behaftet.
Wir nehmen daher an, von einer Eingangsgröße sei der Mittelwert $\overline{x}$ und eine charakteristische Abweichung Δx bekannt: $x = \overline{x} \pm \Delta x$

<u>Die Fehlerfortpflanzungsrechnung gibt Auskunft über die Auswirkung der Unsicherheit einer Eingangsgröße Δx auf das Ergebnis.</u>

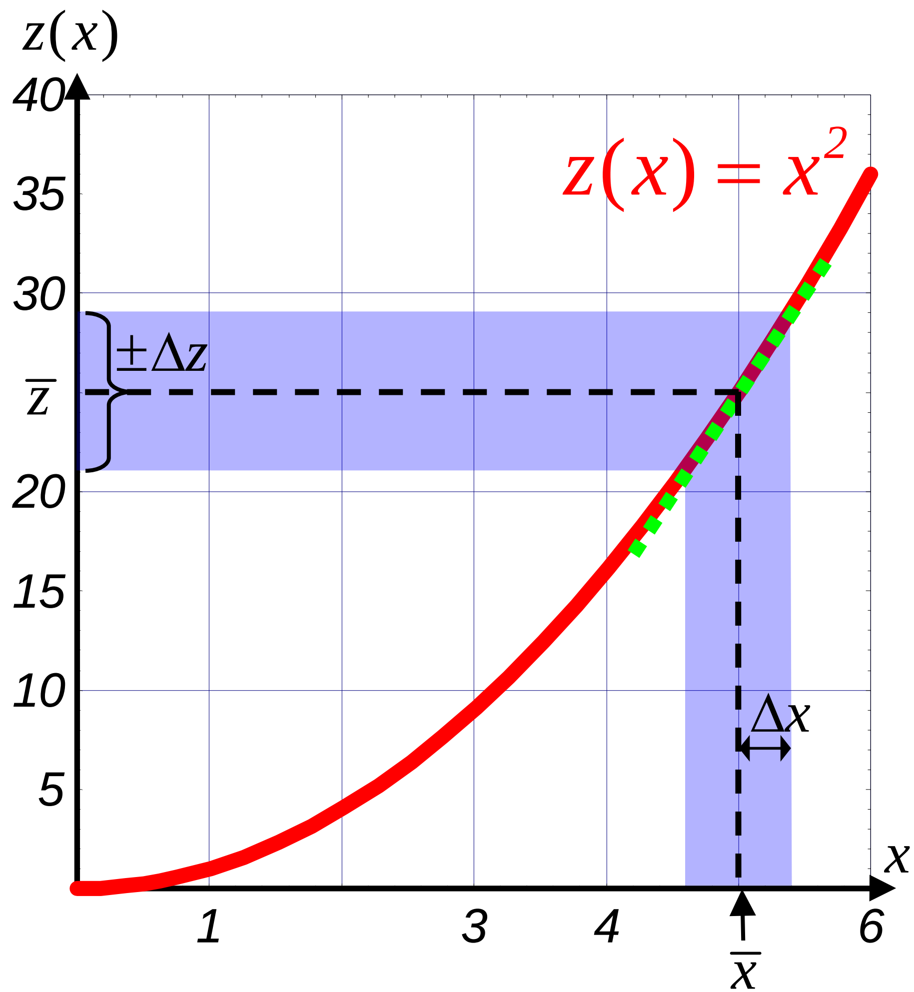
Für eine gegebene Funktion $z(x)$ soll zunächst der Fehler des Funktionswertes bei einer fehlerbehafteten Eingangsgröße untersucht werden.
Oder anders ausgedrückt, wie stark pflanzt sich ein Fehler in x auf die abhängige Variable z fort?

$$x = \overline{x} \pm \Delta x \qquad \xrightarrow{\quad ? \quad} \qquad z = \overline{z} \pm \Delta z$$

Wir betrachten hierzu zunächst Funktionen einer Variablen und übertragen das Ergebnis dann auf Funktion mehrerer Variablen.

Als einfaches Beispiel betrachten wir die Funktion $z(x) = x^2$.
Die Eingangsgröße $x = \overline{x} \pm \Delta x$ sei gegeben.

Man kann natürlich explizit die Funktionswerte $z(x+\Delta x)$ und $z(x-\Delta x)$ berechnen und daraus den Fehler in z ermitteln: $\Delta z = z(x+\Delta x) - z(x-\Delta x)$



Dieses Vorgehen wird aber schnell zu kompliziert, wenn Funktionen mit mehreren Variablen betrachtet werden.

In der Regel genügt es für die Auswirkung des Fehlers die linearisierte Funktion (Tangente ▪▪▪▪▪▪▪) zu betrachten.

Damit folgt unmittelbar $\Delta z \approx z'(\overline{x}) \cdot \Delta x$

D.h. mit Hilfe der Steigung an der Stelle $\bar{x}$ lässt sich berechnen wie stark sich der Fehler in x auf die abhängige Variable z auswirkt.

Der mittlere Funktionswert $\bar{z}$ kann unmittelbar mit $\bar{x}$ berechnet werden.

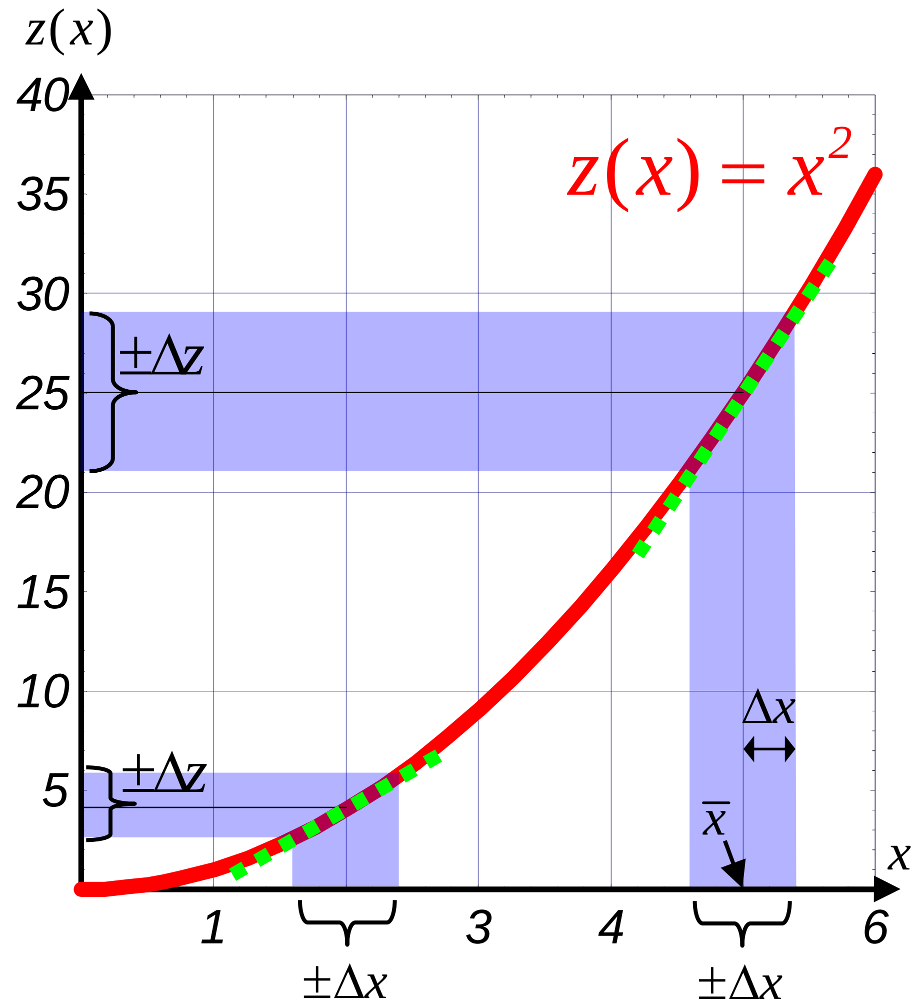
Zusammengefasst:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x$$

$$\Downarrow$$

$$z = \bar{z} \pm \Delta z$$

mit $\bar{z} = z(\bar{x})$ und $\Delta z = z'(\bar{x})\,\Delta x$



Das Ergebnis der vorhergehenden Folie lässt sich unmittelbar auf Funktionen mehrerer Variablen erweitern, wobei entsprechende partielle Ableitungen eingesetzt werden müssen.

Hängt die Funktion *z* von zwei Veränderlichen ab: $z=z(x,y)$ gilt:

$$x = \overline{x} \pm \Delta x,\ \ y = \overline{y} \pm \Delta y$$
$$\Downarrow$$
$$z = \overline{z} \pm \Delta z$$
$$\text{mit } \overline{z} = z(\overline{x}, \overline{y}) \ \text{ und } \Delta z = \left|z_x(\overline{x}, \overline{y}) \cdot \Delta x\right| + \left|z_y(\overline{x}, \overline{y}) \cdot \Delta y\right|$$

Anmerkungen:

- Die part. Ableitung z.B. nach *x* bestimmt also die Auswirkung des Fehlers in der entsprechenden Eingangsgröße *x*.
- Man kann mit Hilfe partieller Ableitungen also die ‚Empfindlichkeit' einer Funktion bzgl. verschiedener Variablen untersuchen.

Lineare Fehlerfortpflanzung

weitere Anmerkungen:

- Da die partiellen Ableitungen u.U. auch negative Werte ergeben können, sind Beträge zu verwenden. Ansonsten könnte es vorkommen, dass ein Fehler in *x* durch einen entsprechenden Fehler in *y* kompensiert würde und das Gesamtergebnis dann fehlerfrei wäre.

- Für Funktionen mit mehr als zwei Variablen $z = f(x_1, x_2, x_3, \dots)$ gilt entsprechend:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_i = \overline{x}_i \pm \Delta x_i \\ \quad\Downarrow \\ z = \overline{z} \pm \Delta z \\ \text{mit} \quad \overline{z} = f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \dots) \\ \text{und } \Delta z = \left| f_{x1}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \dots) \cdot \Delta x_1 \right| + \left| f_{x2}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \dots) \cdot \Delta x_2 \right| + \left| f_{x3}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \dots) \cdot \Delta x_3 \right| + \dots \end{array}}$$

- Δz bezeichnet den so genannten absoluten Fehler. Der relative Fehler ist $\Delta z / \overline{z}$

Partielle Ableitungen zweiter Ordnung → Satz von Schwarz

Wie im eindimensionalen Fall, können die partiellen Ableitungen z_x und z_y erneut differenziert werden.
Man erhält 4 **zweite partielle Ableitungen** z_{xx} , z_{xy} , z_{yx} , z_{yy} .
Hierbei bedeutet z_{xy} , dass $z(x,y)$ zuerst nach x und dann nach y abgeleitet wird.

Weitere gebräuchliche Schreibweisen sind: $z_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} z(x,y)$

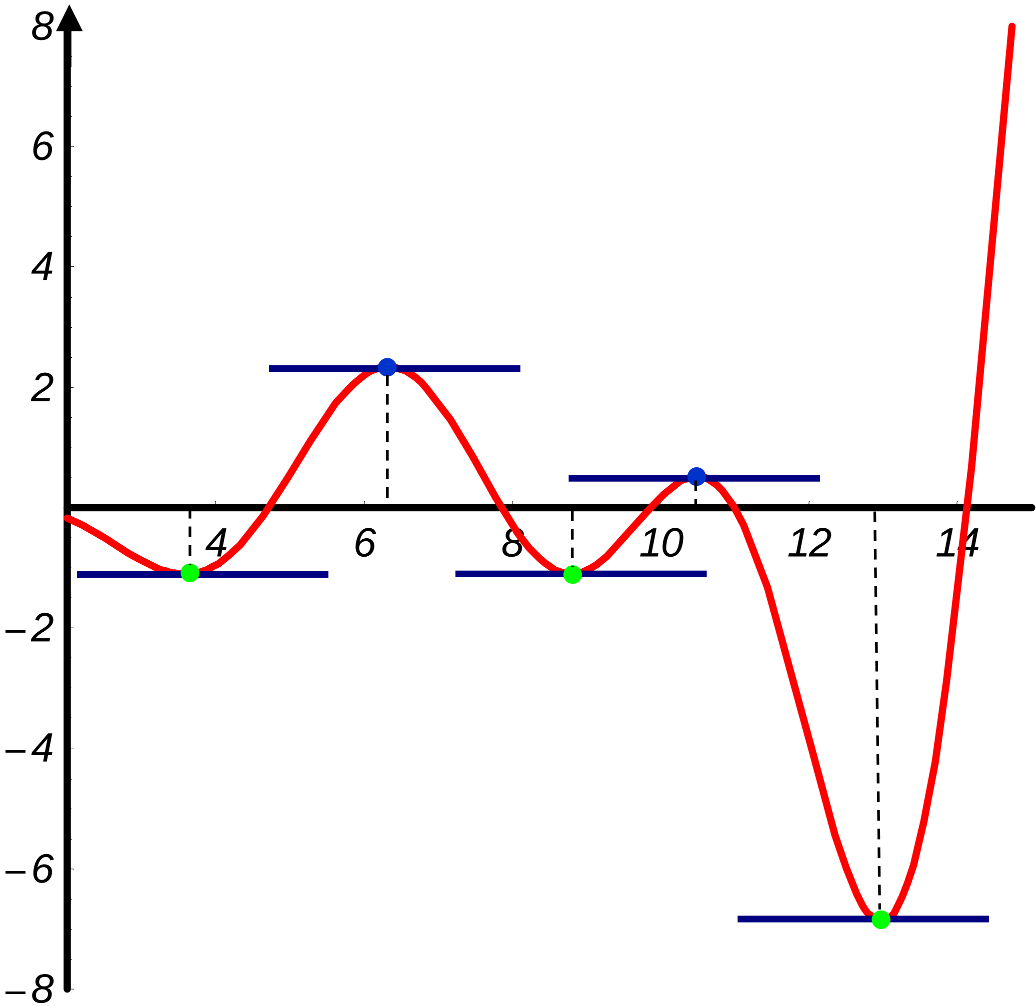
Bzgl. der Reihenfolge der Ableitungen gibt es einen nützlichen Satz:
<u>Satz von Schwarz:</u> Sind Funktion und deren partiellen Ableitungen stetig, so ist die Reihenfolge der Differentiation vertauschbar, d.h. es gilt: $z_{xy} = z_{yx}$.

Kurze Wiederholung zu relativen Extrema

Bei Funktionen mit einer Veränderlichen gilt:

Die **notwendige** Bedingung für relative Extremwerte ist:
$f'(x_0) = 0$.
Geometrische Interpretation:
Jede Extremstelle hat eine waagerechte Tangente.

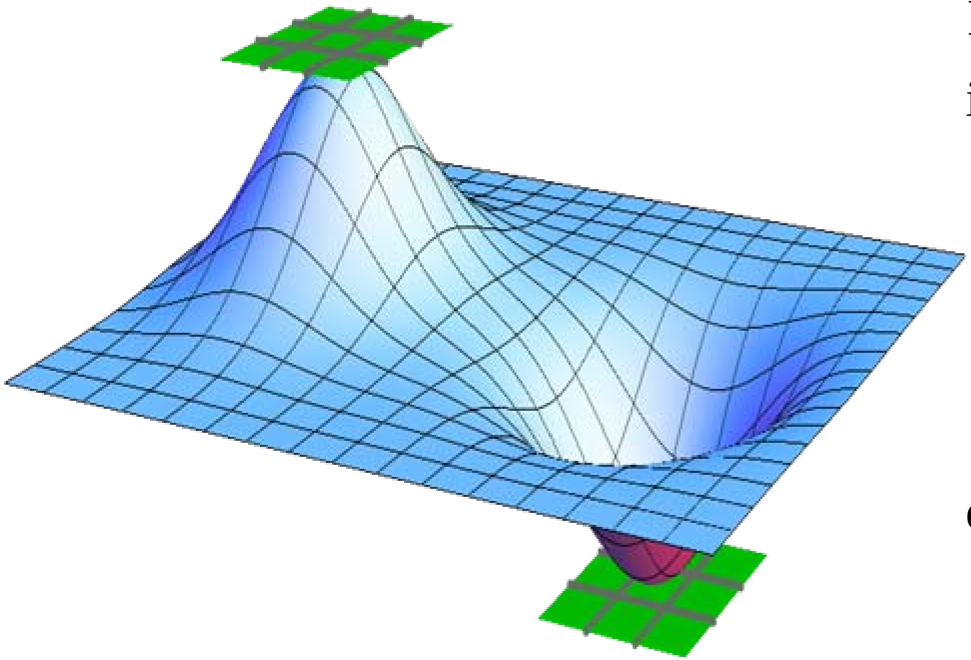
Die Bedingung für relative Extremwerte ist **hinreichend**, wenn zusätzlich gilt:
$f''(x_0) \neq 0$.
Geometrische Interpretation:
Bei jeder Extremstelle ist die Kurve gekrümmt.



Relative Extrema von Funktionen zweier Veränderlicher

Die erste Bedingung kann unmittelbar auf zwei Variablen verallgemeinert werden. Die zweite leider nicht.

Bei zwei Variablen besagt die **notwendige** Bedingung für einen relativen Extremwert bei (x_0, y_0), dass die Tangentialebene waagerecht sein muss.

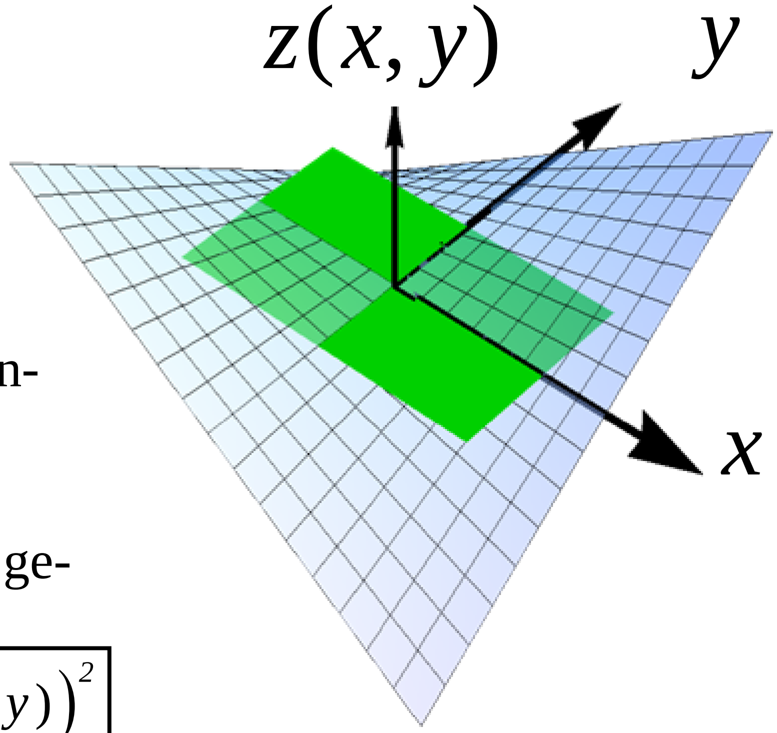


Die Gleichung der Tangentialebene im Arbeitspunkt $\left(x_0, y_0\right)$ lautet:

$$T(x,y) = z(x_0,y_0) + z_x(x_0,y_0)\cdot\left(x-x_0\right) + z_y(x_0,y_0)\cdot\left(y-y_0\right)$$

d.h. es muss gelten: $\boxed{\begin{array}{l} z_x(x_0,y_0)=0 \\ z_y(x_0,y_0)=0 \end{array}}$

Eine waagerechte Tangentialebene liegt aber auch an einem Sattelpunkt vor, wobei es sich natürlich um kein Extremum handeln kann.



Um Sattelpunkte auszuschließen, Bedarf es einer weiteren Bedingung. Diese ist allerdings nicht so anschaulich wie im eindimensionalen Fall.

Zunächst wird eine Hilfsfunktion, die so genannte Funktionaldeterminante definiert:

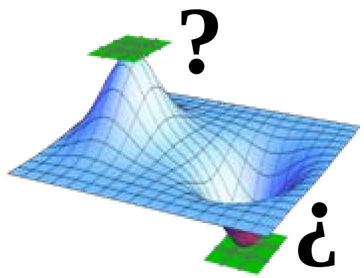
$$\boxed{D(x,y) = z_{xx}(x,y) \cdot z_{yy}(x,y) - \left(z_{xy}(x,y)\right)^2}$$

Die zweite (hinreichende) Bedingung für ein lokales Extremum lautet dann: an der Stelle (x_0, y_0) muss gelten:

$$\boxed{D(x_0, y_0) > 0.}$$

Relative Extrema von Funktionen zweier Veränderlicher → Kochrezept

I.   Bestimme die partiellen Ableitungen:



$$z_x(x,y),\ z_x(x,y),\ z_{xx}(x,y),\ z_{yy}(x,y),\ z_{xy}(x,y)$$

II. Löse das Gleichungssystem:

$$z_x(x,y)=0\ ,\ z_y(x,y)=0 \longrightarrow \text{'Lösungspärchen'}\ (x_1,y_1),\ (x_2,y_2),\ldots$$

III. Aufstellen der Funktionaldeterminante: $D(x,y)=z_{xx}(x,y)\cdot z_{yy}(x,y)-\left(z_{xy}(x,y)\right)^2$

Für jede gefundene Lösung (x_i,y_i) überprüfe ob gilt: $D(x_i,y_i)>0$

→ Falls ja, liegt an der Stelle (x_i,y_i) ein lokales Extremum.

Die Art des Extremums kann mit Hilfe von z_{xx} oder z_{yy} bestimmt werden.

$z_{xx}(x_i,y_i)>0\ \ \left(z_{yy}(x_i,y_i)>0\right)\Rightarrow$ lok. Minimum;

$z_{xx}(x_i,y_i)<0\ \ \left(z_{yy}(x_i,y_i)<0\right)\Rightarrow$ lok. Minimum

→ Falls gilt $D(x_i,y_i)\le 0$ kann ohne Weiteres keine Aussage gemacht werden.