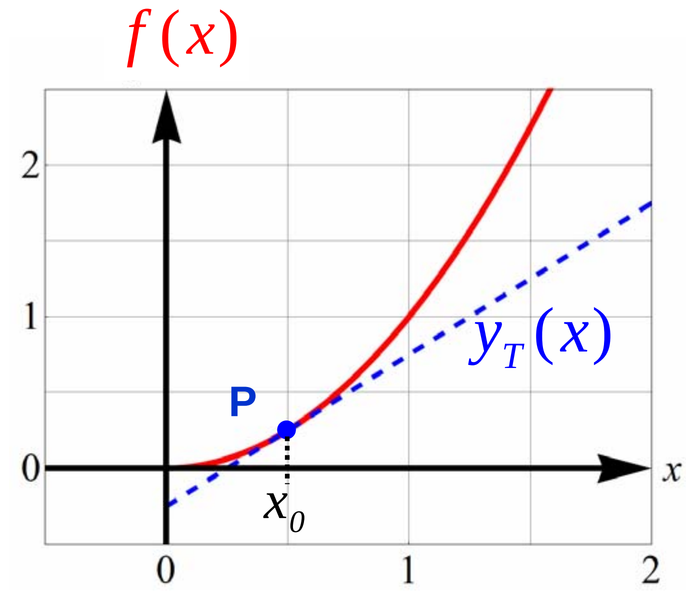
Tangentengleichung

Wie Sie wissen, gibt die erste Ableitung einer Funktion deren Steigung an.

Betrachtet man eine fest vorgegebene Stelle x_0, gibt $f\,'(x_0)$ also die Steigung der Kurve und somit auch die Steigung der Tangente an der Stelle x_0 an.

Frage: Wie lautet die Geradengleichung für die Tangente, y_T= ?



Antwort: Allgemein gilt: $y_T = m \cdot x + b$.

Die Steigung ist bekannt $m = f\,'(x_0)$,

damit lautet die Tangentenglg. $y_T = f\,'(x_0) \cdot x + b$ (*)

Zur Berechnung des Achsenabschnitts b nutzen wir aus,

dass der Punkt P mit den Koordinaten $x = x_0$ und $y = f(x_0)$

auf der Tangenten liegt und somit die Gleichung (*) erfüllt:

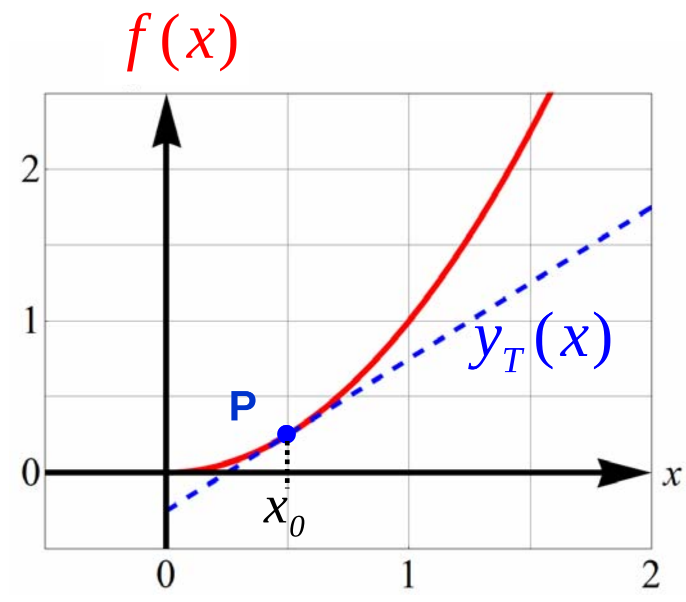
$$f(x_0) = f\,'(x_0) \cdot x_0 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = f(x_0) - f\,'(x_0) \cdot x_0$$

…. alles zusammen ergibt die Tangentengleichung

$$y_T = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \ ,$$

wobei sich hier eine praktischere Schreibweise anbietet:

$$y_T = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \qquad (**)$$



Die Gleichung (**) liefert also ein einfaches Rezept, für die Berechnung einer Tangente.

Wichtig ist die Unterscheidung von x und x_0 !
Die Stelle x_0 ist fest vorgegeben (man bezeichnet sie als Arbeitspunkt), die unabhängige Variable in der Geradengleichung heißt x!

Beispiel: gesucht ist die Tangente an die Funktion $f(x) = x^2$ mit Arbeitspunkt $x_0 = 0.5$

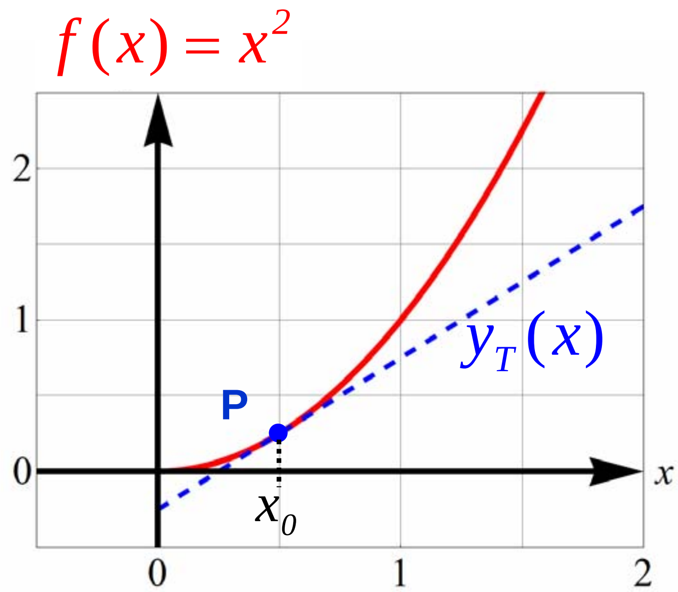
Ausgangsformel: $y_T = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Zutaten: $f(0.5) = 0.25$

$f'(0.5) = 1$

Ergebnis: $y_T(x) = 0.25 + 1 \cdot (x - 0.5) =$

$y_T(x) = x - 0.25$



Definition:

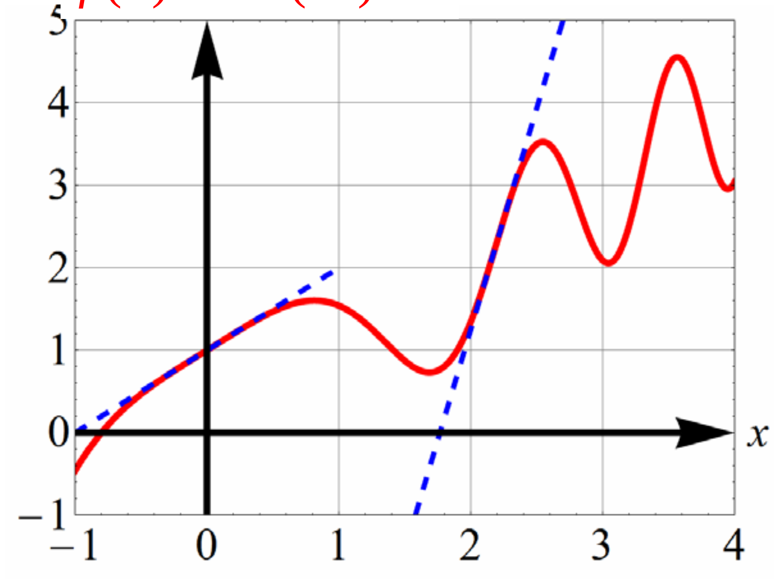
Linearisierung bedeutet die originale Funktion in einem Teilbereich durch eine Tangente zu ersetzten.

Vorteil: Die Tangentengleichung ist immer eine einfache Geradengleichung, egal wie kompliziert die Ausgangsfunktion ist.

Tangentengleichung

Übung: gesucht sind Tangenten an die Funktion $f(x) = \cos(x^2) + x$

1. im Arbeitspunkt $x_0 = 0$
2. im Arbeitspunkt $x_0 = 2.2$



$$Lsg.: \quad x_0 = 0,\ y_T(x) = x + 1 \qquad x_0 = 2.2,\ y_T(x) = 5.3642x - 9.4740$$

Zur Motivation:

eine Menge verschiedener Gleichungstypen können mit entsprechenden ‚Rezepten‘ einfach gelöst werden, z.B.:

- Lineare Gleichungen $ax + b = 0$
- Quadratische Gleichungen $x^2 + px + q = 0$
- Kubische Gleichung ohne Absolutglied $ax^3 + bx^2 + cx = 0$
- Bi-quadratische Gleichungen $ax^4 + bx^2 + c = 0$
- Nullproduktgleichungen z.B. $(x - 2) \cdot \ln x = 0$

Lösen Sie mal $x = \sin(x + 1)$

Das haben Sie nicht geschafft?

Da es sich hier um eine sogenannte transzendente Gleichung handelt, konnten Sie auch gar keine Lösung direkt ausrechnen. Das funktioniert nur mit viel Fleiß oder Computerhilfe … z.B. mit Hilfe des **Newtonverfahrens**.

Strategie:

Zunächst wird die zu lösenden Gleichung in die Form $f(x)=0$ gebracht.

Die Lösung, d.h. die Nullstelle, wird dann mit Hilfe von Tangenten bestimmt.

Beispiel:

Gesucht ist die Lösung der Gleichung $12x^2 + 17 = 8x^3 + 6x$

das ist äquivalent zu: $8x^3 + 6x - 12x^2 - 17 = 0$

Jetzt sucht man eine Nullstelle der Funktion $f(x) = 8x^3 + 6x - 12x^2 - 17$.

Newtonverfahren

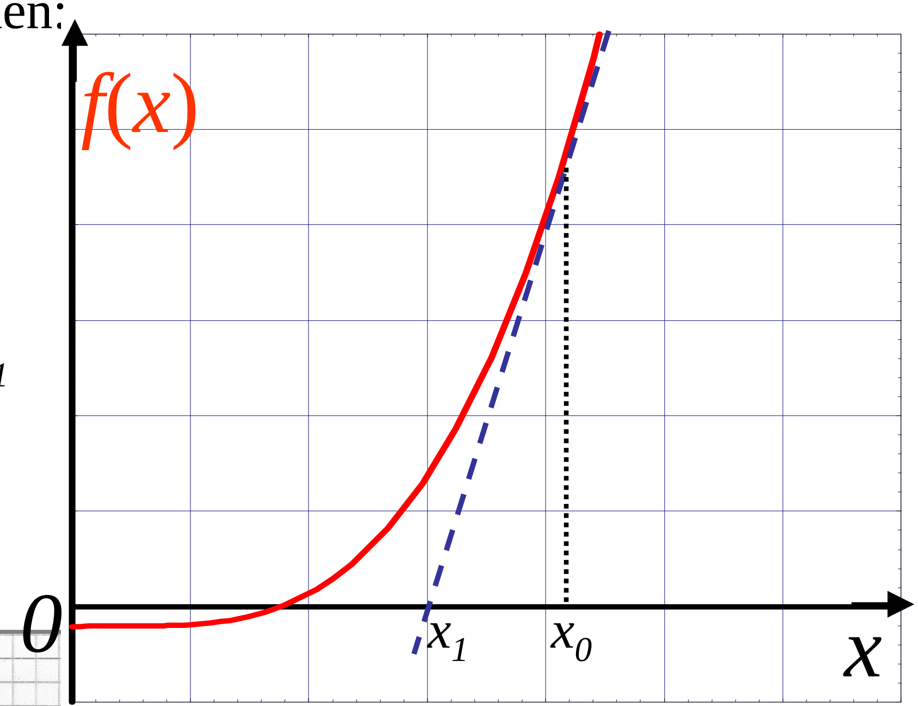
Die Nullstelle (= Lösung der Ursprungsgleichung) wird iterativ – also schrittweise – bestimmt. Ausgehend von einem Startwert x_0 (einem ersten ‚Schätzwert') hangelt man sich zu immer besseren Näherungswerten für die exakte Nullstelle.

In den meisten Fällen wird man die Nullstelle exakt nie erreichen, man kann Ihr aber durch hinreichend viele Iterationsschritte beliebig nahe kommen … und das reicht:

$$x_0 \quad \rightarrow \quad x_1 \quad \rightarrow \quad x_2 \quad \rightarrow \quad x_3 \quad \rightarrow \quad \ldots \rightarrow \text{Lösung}$$

Wie das ‚Weiterhangeln' genau funktioniert,
lässt sich am besten grafisch veranschaulichen:

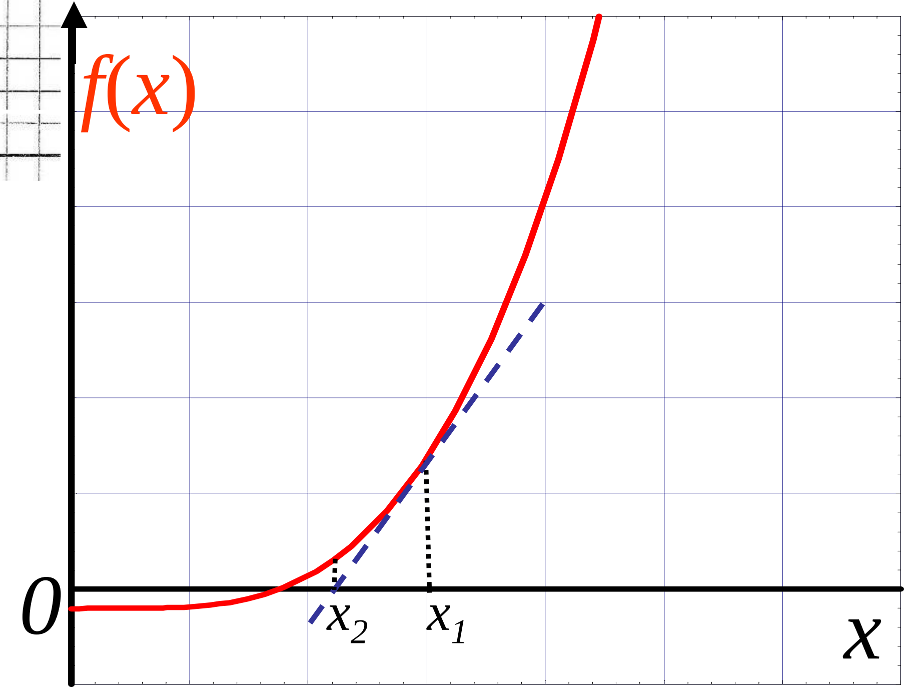
<u>Schritt 1:</u> *ausgehend vom Startwert x_0 wird zunächst die [Tangente]() an die Funktion bestimmt. Man berechnet dann die Nullstelle der Tangente. Diese Tangenten-Nullstelle x_1 ist (unter geeigneten Voraussetzungen) eine verbesserte Näherung für die gesuchte Nullstelle*



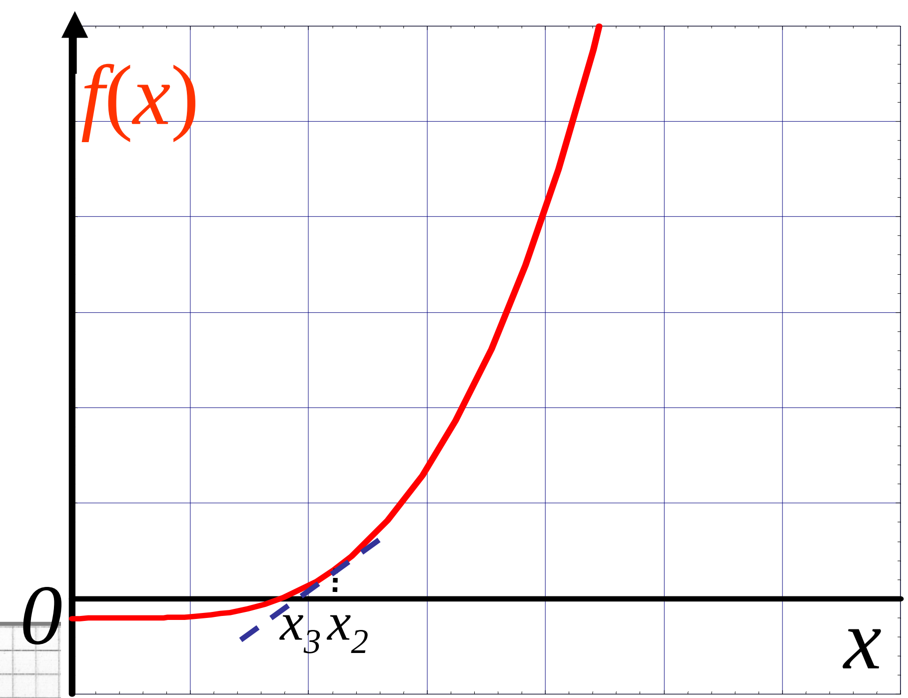
Newtonverfahren

Alle weiteren Schritte wiederholen genau das selbe Vorgehen:

<u>Schritt 2:</u> *ausgehend vom Wert x_1 wird eine neue* Tangente *und deren Nullstelle x_2 bestimmt.*



<u>Schritt 3:</u> *ausgehend vom Wert x_2 wird eine weitere* Tangente *und deren Nullstelle x_3 bestimmt.*



. . .

<u>Schritt n+1:</u> *ausgehend vom Wert x_n wird die* Tangente *an die Funktion und deren Nullstelle x_{n+1} bestimmt.*

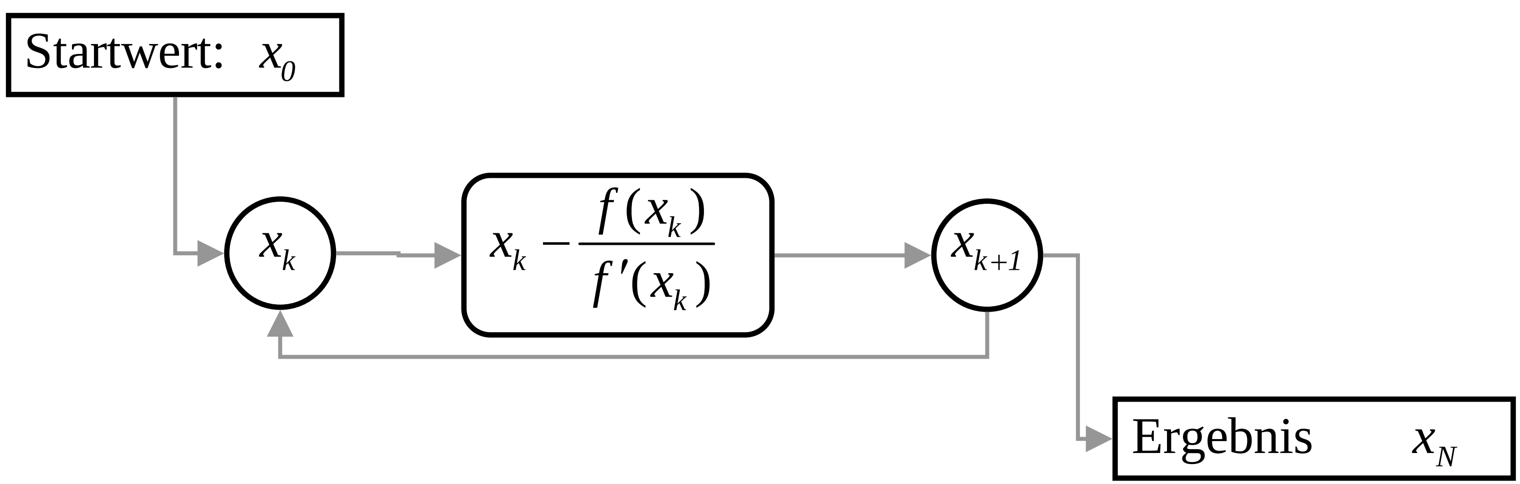
Newtonverfahren

Das **Newtonverfahren** läuft also auf die wiederholte Bestimmung von Tangenten-Nullstellen heraus. Daraus kann unmittelbar die Rechenvorschrift abgeleitet werden:

Iterationsvorschrift: $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Tipp zur Herleitung: bestimmen Sie die Tangentengleichung für den Arbeitpunkt $P = \left(x_k, f(x_k)\right)$ und die Nullstelle der Tangente.

Die Formel übersetzt das grafisch beschriebene Verfahren zur Nullstellensuche in einen Rechen-Verfahren, welches dem unten gezeigten Flowchart entspricht.



Newtonverfahren

Beispiel vom Anfang: gesucht ist die Lösung der Gleichung $x = \sin(x+1)$.
Startpunkt sei $x_0 = 1$.

Zur Übung werden zwei Schritte des Newtonverfahrens durchgeführt:

Ausgangsgleichung: $x = \sin(x+1) \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x+1) - x = 0$

die Funktion, deren Nullstelle gesucht wird, ist also $f(x) = \sin(x+1) - x$.

Wir benötigen auch die Ableitung: $f'(x) = \cos(x+1) - 1$

1. Schritt: $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \dfrac{\sin(1+1)-1}{\cos(1+1)-1} = 0.9359$

2. Schritt: $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1 - \dfrac{\sin(0.936+1)-0.936}{\cos(0.936+1)-1} = 0.9346$

… denken Sie daran bei der Rechnung Ihren Taschenrechner auf Bogenmaß zu stellen.

Man erhält die selben Werte, wenn die Funktion $f(x) = x - \sin(x+1)$ gewählt wird.

Rechnet man ein paar Stellen mehr aus ergibt sich $x = 0.9345632107520243\ldots$

Newtonverfahren … ein paar Anmerkungen

1. Das Newtonverfahren konvergiert lokal, d.h. wenn der Startwert x_0 ‚genügend nah' an der wahren Nullstelle liegt, funktioniert's.

2. Das Newtonverfahren funktioniert nicht immer, z.B. kann ein ungeeigneter Startwert gewählt worden sein. Das Verfahren funktioniert aber garantiert, wenn für alle Näherungswerte x_k die Bedingung $\left| f(x_k) \cdot f''(x_k) \big/ \left(f'(x_k) \right)^2 \right| < 1$ erfüllt ist.

3. Hat die Funktion mehrere Nullstellen, so hat jede Nullstelle einen gewissen Einzugsbereich von Startwerten.

4. Es gibt verschiedene Abbruchkriterien, wann die Iteration beendet werden soll. In den meisten Fällen kann dies ganz pragmatisch gehandhabt werden. Die Iteration wird abgebrochen, sobald eine gewünschte Zahl an Nachkommastellen fest steht – sich also bei weiteren Iterationsschritten nicht mehr ändert.

4. Manchmal lässt sich die ungefähre Lage der Nullstelle aus einer Skizze ablesen:

5. Manchmal lässt sich die ungefähre Lage der Nullstelle und somit ein geeigneter Startwert aus einer Skizze ablesen:

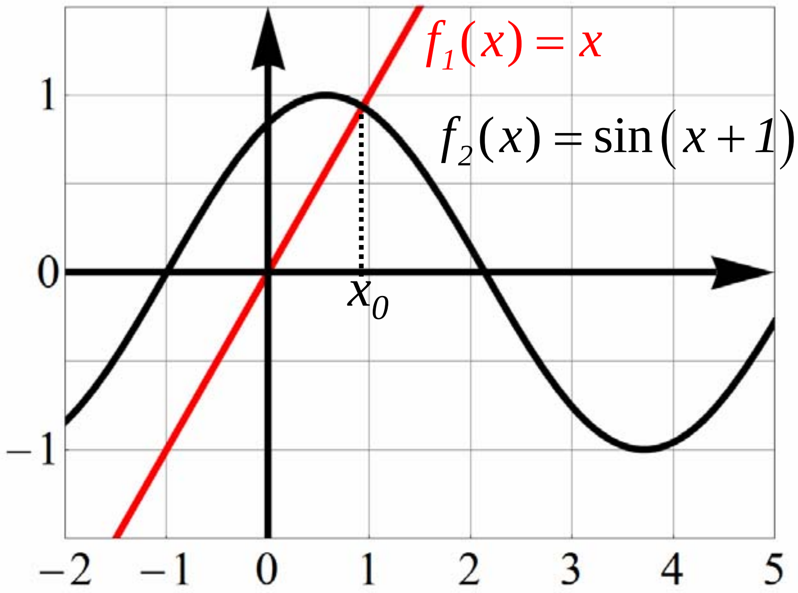
Beispiel: $x = \sin(x+1) \longrightarrow x - \sin(x+1) = 0 \quad f(x) = x - \sin(x+1)$

$f(x)$ lässt sich nicht nicht leicht skizzieren.

Man kann aber den Schnittpunkt der Funktionen:

$f_1(x) = x$ und $f_2(x) = \sin(x+1)$ anhand einer

Skizze bestimmen.



<u>Übungen</u>: gesucht ist die Lösung der Gleichung $e^{-x} = \cos\left((x-2)^2\right)$.

Berechnen Sie das Ergebnis bis auf die vierte Nachkommastelle genau.

Startpunkt sei $x_0 = 1$.

$$Lsg.: \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 0.915925, \quad x_2 = 0.922092, \quad x_3 = 0.922124, \quad x_4 = 0.922124$$