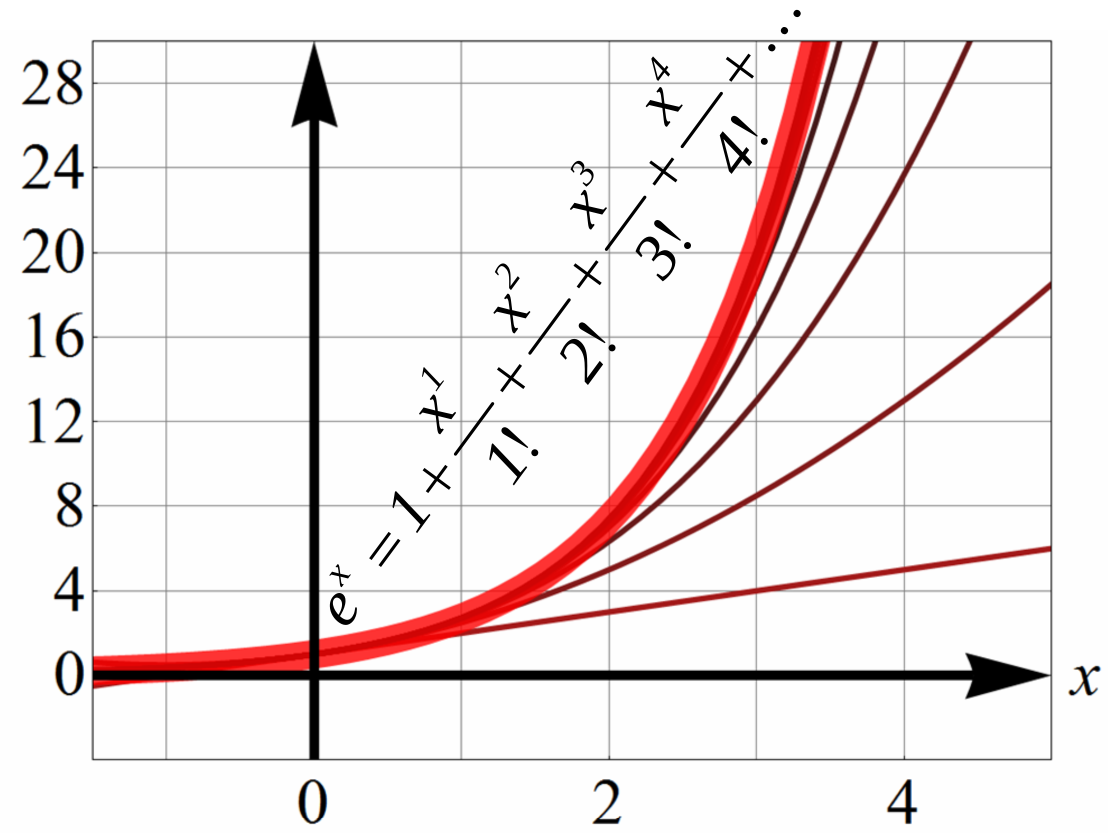
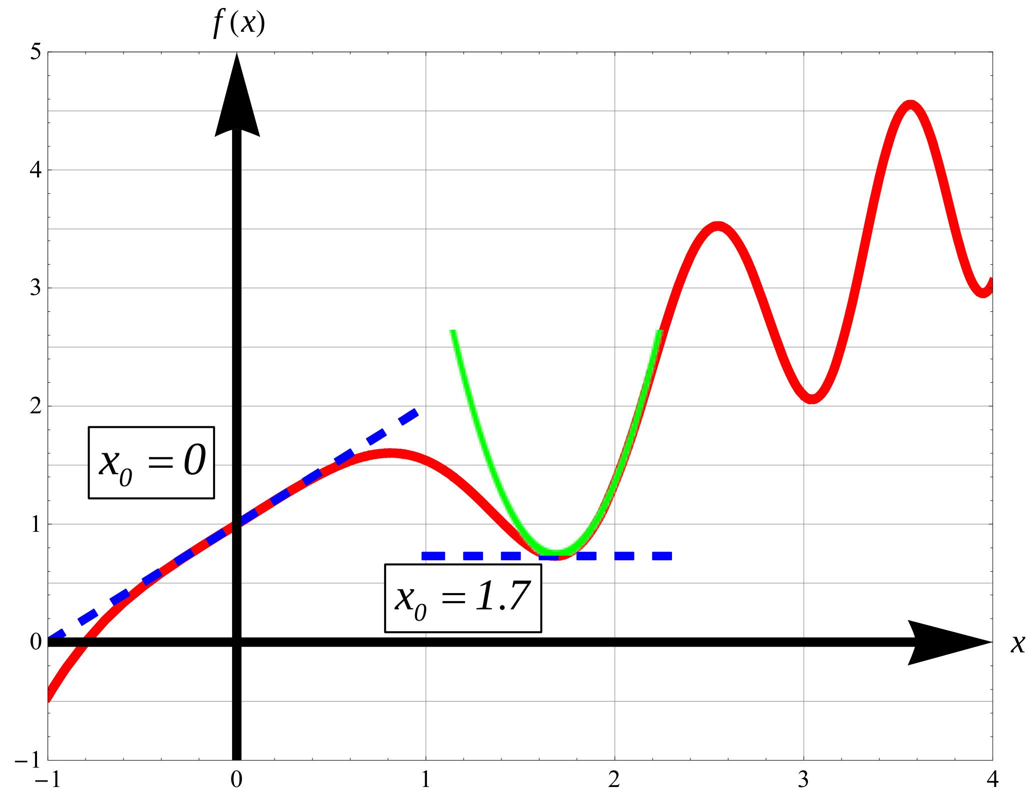
Taylor-Reihen



Im Zusammenhang mit der Berechnung von Tangenten hatten wir den Begriff der **Linearisierung** eingeführt. Dies bedeutet, dass eine Funktion in einem Teilbereich durch eine Tangente ersetz wird.

In Formeln:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$



<u>Frage:</u> Ist die Linearisierung eine gute Näherung für eine Funktion?

<u>Antwort:</u> … hängt ganz davon ab …
Bei $x_0=0$ wird z.B. die gezeigte Funktion recht gut durch die entsprechende Tangente beschrieben. Bei $x_0=1.7$ klappt es schlecht, eine Parabel wäre besser.

Taylor-Reihe einer Funktion:

Man kann Funktionen besser annähern, indem man zur Linearisierung noch weitere Terme hinzufügt und zwar folgendermaßen:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)\cdot(x - x_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_0)\cdot(x - x_0)^3 + \frac{1}{24} f^{(4)}(x_0)\cdot(x - x_0)^4 + \cdots$$

Zur Systematik der höheren Terme:

Um Terme bis zur n-ten Ordnung auf der rechten Seite hinzuzufügen, müssen die ersten n Ableitung berechnet und am Entwicklungspunkt ausgewertet werden. Die Vorfaktoren sind so bestimmt, dass die Ableitungen der Taylor-Reihe (rechte Seite) im Entwicklungspunkt mit der Ableitung der Originalfunktion übereinstimmen.

(siehe auch nächste Folie.)

Wie bei der Tangentenberechnung, ist die Unterscheidung von x und x_0 wichtig.

Die Stelle x_0 ist fest vorgegeben und bezeichnet den Entwicklungspunkt (bei der Linearisierung auch Arbeitspunkt genannt). Die unabhängige Variable in der heißt x.

Die Taylor-Reihe

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2+\frac{1}{6}f'''(x_0)\cdot(x-x_0)^3+\frac{1}{24}f^{(4)}(x_0)\cdot(x-x_0)^4+\cdots$$

lässt sich mit Hilfe von Summenzeichen und Fakultät sehr kompakt schreiben:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Beachte, für die Fakultät gilt:

$$0!=1,\ 1!=1,\ 2!=1\cdot2,\ 3!=1\cdot2\cdot3,\ \ldots$$

$f^{(n)}(x_0)$ bezeichnet die n-te Ableitung an der Stelle x_0, entsprechend bezeichnet $f^{(0)}(x_0)$ die Originalfunktion bei x_0.

Die Aussage der vorigen Folie bzgl. der Ableitungen heißt damit übersetzt:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)^{(n)}=f^{(n)}(x_0)$$

Taylor-Reihen

Unter geeigneten Voraussetzungen kann eine Funktion exakt durch Taylor-Reihe (Summe mit ∞ vielen Termen) dargestellt werden.

In der Praxis begnügt man sich oft mit den ersten Termen der Taylor-Reihe, mit einem so genannten Taylor-Polynom, dies benutzt man dann als Näherung für die Ausgangsfunktion:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot\left(x - x_0\right) + \ldots\ \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\cdot\left(x - x_0\right)^n = P_{n,x0}(x)$$

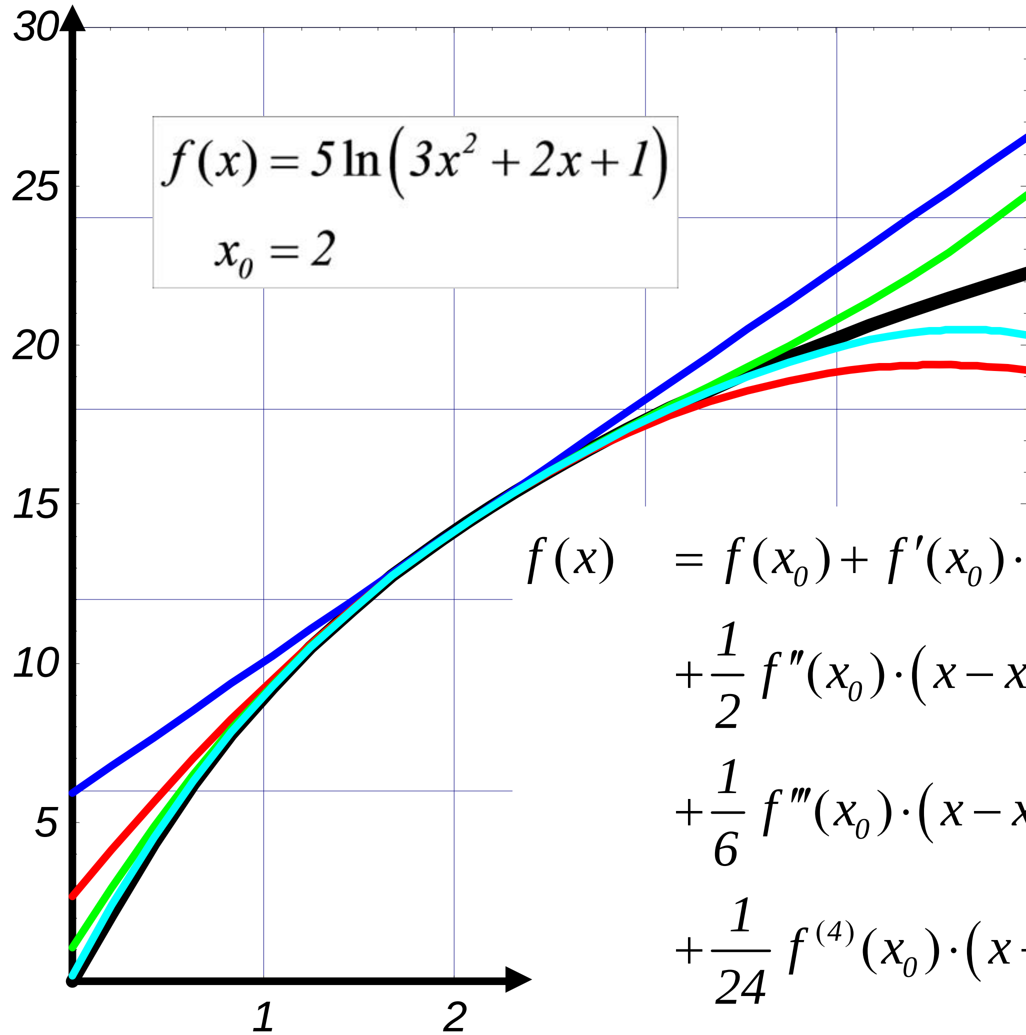
Anders ausgedrückt:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot\left(x - x_0\right) + \frac{1}{2} f''(x_0)\cdot\left(x - x_0\right)^2 \cdots = P_{n,x0}(x) + \text{Rest}$$

Bzgl. weiteren ‚Details‘, wie etwa möglichen Einschränkungen bei Tylor-Näherungen, Güte der Näherung (Wie groß ist der ‚Rest‘?) und Konvergenzradien sei auf weiterführende Literatur verwiesen.

Taylor-Reihen

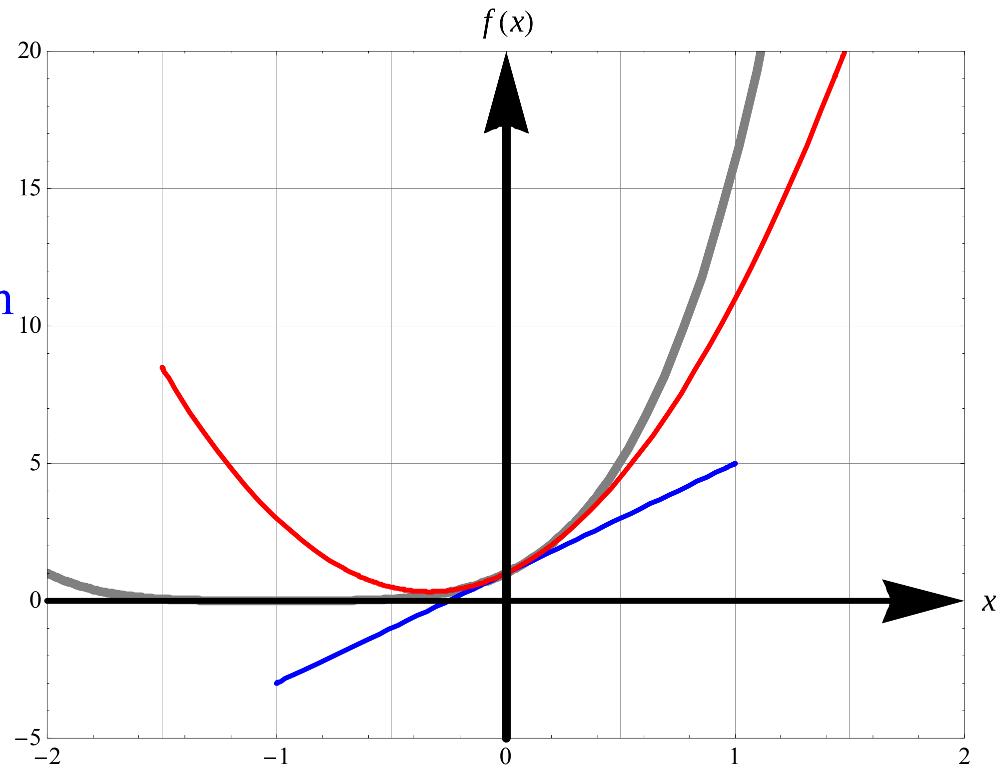
Die nebenstehende Grafik zeigt wie sich Taylor-Plynome mit zunehmender Anzahl von Termen immer besser an die zu beschreibende Funktion anschmiegen.



$$
\begin{aligned}
f(x) \quad &= f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) \\
&+ \frac{1}{2} f''(x_0)\cdot(x - x_0)^2 \\
&+ \frac{1}{6} f'''(x_0)\cdot(x - x_0)^3 \\
&+ \frac{1}{24} f^{(4)}(x_0)\cdot(x - x_0)^4 \\
&+ \ldots
\end{aligned}
$$

Ein einfaches Berechnungsbeispiel:

$$f(x) = (1+x)^4, \qquad x_0 = 0$$



gesucht ist zunächst das Taylor-Ploynom 1. Ordnung (Linearisierung):

$$P_{1x_0} = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = 4(1+x)^3, \quad f'(0) = 4$$

$$P_{n=1\ x_0=0} = 1 + 4x$$

und weiterhin ist der nächst höhere Term gesucht:

$$P_{2x_0} = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)\cdot(x - x_0)$$

$$f''(x) = 12(1+x)^2, \quad f''(0) = 12$$

$$P_{n=2\ x_0=0} = 1 + 4x + 6x^2$$

Anmerkungen:

1. Die Taylor-Reihe strebt i.a. nur gegen die Originalfunktion, wenn die x-Werte ‚nahe genug' am Entwicklungspunkt x_0 liegen (Stichwort Konvergenzradius).
2. Generell ist die Qualität der Näherung um so besser, je dichter das betrachtete ‚x' am Entwicklungspunkt x_0 liegt und je mehr Terme im Taylor-Polynom berücksichtigt werden.
3. Zum Aufstellen des Taylor-Polynoms muss die Funktion hinreichend oft differenzierbar sein.
4. Als Entwicklungspunkt bietet sich oftmals $x_0 = 0$ an. Die Taylor-Reihe wird dann zu einer einfachen Potenzreihe (Mac-Laurin-Reihe).

Linearisierung $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Taylor-Reihe einer Funktion

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_0) \cdot (x - x_0)^3 + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Mac-Laurin-Reihe ($x_0 = 0$)

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2} f''(0) \cdot x^2 + \frac{1}{6} f'''(0) \cdot x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Taylor-Polynom

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \cdot (x - x_0)^n = P_{n,x0}(x)$$

$$P_{n,x0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Taylor-Reihen

Rechenbeispiel: gesucht ist die Mac-Laurin-Reihe von $f(x)=\cos x$.

Gesucht ist also die Taylor-Reihe $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ mit $x_0=0$.

Wir bilden die ersten Ableitungen

$$f(x)=\cos x,\ f'(x)=-\sin x,\ f''(x)=-\cos x,\ f'''(x)=\sin x,\ f^{(4)}(x)=\cos x,\ f^{(5)}(x)=-\sin x,\ \ldots$$

Einsetzen des Entwicklungspunkts $x_0=0$ in Funktion und Ableitungen:

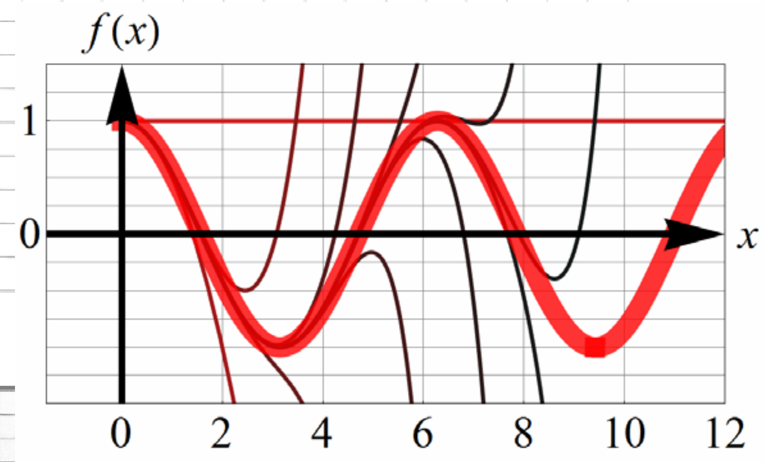
$$f(0)=1,\quad f'(0)=0,\quad f''(0)=-1,\quad f'''(0)=0,\quad f^{(4)}(0)=1,\quad f^{(5)}(0)=0,\ldots$$

Einsetzen in die Summenformel:

$$\cos x=\frac{1}{1}(x-0)^0+\frac{0}{1}(x-0)^1+\frac{-1}{2!}(x-0)^2+\frac{0}{3!}(x-0)^3+\frac{1}{4!}(x-0)^4+\frac{0}{5!}(x-0)^5+\frac{-1}{6!}(x-0)^6+\ldots$$

$$=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\ldots$$

In der Mac-Laurin-Reihe kommen nur Terme mit geraden Exponenten vor und zwar mit alternierenden Vorzeichen.



Taylor-Reihen → Substitution

Gesucht sei jetzt die Mac-Laurin-Reihe von $f(x) = \cos\left(x^3\right)$.

Anhand diese Beispiels wird gezeigt, wie sich in bestimmten Fällen die gesuchte Taylor-Reihe aus einer bekannten Reihe mittels Substitution bestimmen lässt.

Im vorhergehenden Rechenbeispiel wurde gezeigt:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots$$

Um eine Verwechselung mit der jetzt gesuchten Funktion zu vermeiden, nennen wir die Variable um und schreiben das bekannte Ergebnis als:

$$\cos u = 1 - \frac{1}{2!}u^2 + \frac{1}{4!}u^4 - \frac{1}{6!}u^6 + \ldots$$

Substituiert man jetzt $u = x^3$, steht links die hier betrachtete Funktion und auf der rechten Seite ergibt sich die dazu gehörige Mac-Laurin-Reihe:

$$\cos\left(x^3\right) = 1 - \frac{1}{2!}x^6 + \frac{1}{4!}x^{12} - \frac{1}{6!}x^{18} + \ldots$$

Warum ist die Darstellung einer Funktion als Potenzreihe nützlich?

- Das Rechnen mit einfachen Potenzfunktionen ist einfacherer, als das mit komplizierten Funktionen $\left(\text{z.B. } \cos(2x)/(1-x)^2 \approx 1+2x+x^2-\tfrac{1}{3}x^3\right)$.

- Manchmal kommt man überhaupt nur so weiter

- Potenzfunktionen lassen sich leicht differenzieren und integrieren

  … das wollen wir im Folgenden ausnutzen.

Taylor-Reihen → Integration

Rechenbeispiel: Gesucht ist der Wert des Integrals $\int_0^1 \cos\left(x^3\right)dx$ bis mindestens auf die vierte Nachkommastelle genau.

Wir haben schon berechnet: $\cos\left(x^3\right) = 1 - \frac{1}{2!}x^6 + \frac{1}{4!}x^{12} - \frac{1}{6!}x^{18} + \ldots$

Anstelle der eigentlichen Funktion integrieren wir die ersten Terme der Taylor- bzw. Mac-Laurin-Reihe:

$$\int_0^1 \cos\left(x^3\right)dx \approx \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2!}x^6 + \frac{1}{4!}x^{12} - \frac{1}{6!}x^{18} + \ldots\right)dx$$

$$= \left[x - \frac{1}{7\cdot 2!}x^7 + \frac{1}{13\cdot 4!}x^{13} - \frac{1}{19\cdot 6!}x^{19} + \ldots\right]_0^1$$

$$= 1 - 0.0714286 + 0.0032051 - 0.0000731 + \ldots$$

$$= 0.9317034$$

Man sieht, dass der vierte und folgende Terme die ersten vier Nachkommastellen nicht mehr beeinflussen.

Zum Vergleich, das 'exakte' Ergebnis ist: *0.93170444059154422608...*

Zum Schluss, Mac-Laurin-Reihen einiger wichtiger Funktionen:

Funktion	Reihenentwicklung	Konvergenzbereich
e^x	$1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$	$-\infty < x < \infty$
$\ln(x+1)$	$\frac{x^1}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$	$-1 < x < 1$
$\frac{1}{1+x}$	$1-x^1+x^2-x^3+x^4+\ldots$	$-1 < x < 1$
$\frac{1}{1-x}$	$1+x^1+x^2+x^3+x^4+\ldots$	$-1 < x < 1$
$\sin x$	$\frac{x^1}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$	$-\infty < x < \infty$
$\cos x$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}\ldots$	$-\infty < x < \infty$